CR stage plus mathématiques en seconde du 24 octobre 2011

Dispositif : 1h30 par groupe

Types de tâches :

- Développer des expressions
- Calculer les coordonnées du milieu d'un segment
- Calculer des distances

Thèmes abordés et analyse a posteriori :

- Expression algébrique - Nombres :
  Retour sur les notions de somme (de termes) et de produit (de facteurs) pour situer les « identités remarquables » dans leurs formes procédurales (du produit vers la somme et inversement) et aussi dans leurs formes numérales (le calcul).
  Pour la totalité des élèves, les trois identités remarquables sont des formules. En conséquence ils savent les restituer mais des difficultés surviennent au moment de l'application. Par exemple $(5x-2)^2$ peut devenir $5x^2-20x+4$ lorsqu'ils ont conscience du nombre de termes (ici 3); et parfois $(\sqrt{2}-1)^2$ peut devenir $\left(\sqrt{2}\right)^2-1$ lorsqu'ils ont perdu le fil avec le nombre de termes de la somme.
- Coordonnées d'un point – Configurations planes :
  Deux théorèmes donnent les coordonnées du milieu (repère cartésien) et la distance entre deux points (repère orthonormé). Ces deux théorèmes sont parfaitement connus de la très grande majorité des élèves.
  Il a été rappelé aux élèves les différents repères et la nécessité absolue du repère orthonormé (O,I,J) - le triangle OIJ est isocèle rectangle - pour calculer les distances.
  Chez certains élèves, il est noté des hésitations sur la « place » des axes donnant les abscisses et les ordonnées.
  Le calcul direct des coordonnées d'un milieu se fait bien. Les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu (commun). Retrouver les coordonnées d'une extrémité de segment revient à résoudre une équation d'inconnue x de type
  $$\frac{e}{2}=\frac{a+x}{2}$$
  ou bien une équation qui peut s'y ramenée. Cette dernière transformation n'a pas été immédiate pour certains élèves. Il s'est proposé aussi la méthode du « produit en croix » lorsque le dénominateur du premier membre n'est pas explicitement 2.
  Le théorème donnant la distance entre deux points est certes bien connu mais là encore la transposition entre l'énoncé du théorème entre les points $A\ et\ B$, sous la forme $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$, et le passage au calcul de MN par exemple semble poser quelques difficultés à certains. Et dans l'élaboration du calcul, la forme $(3-1)^2$ remplace parfois $(3-(-1))^2$

En annexes ci-après, les documents supports de la séance (transmath 2de, Nathan 2010).

Annexe 1

Application

Compléments numériques

OBJECTIF 1 Développer, factoriser

Les **identités remarquables** :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Développer / Factoriser)

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (Développer / Factoriser)

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (Développer / Factoriser)

→ *exercices résolus A et B*

EXERCICE RÉSOLU A Développer en utilisant les identités remarquables

Développez les expressions suivantes :

- $A = (3t-4)^2$
- $B = (5x+2)^2 - 2(4x-1)$
- $C = \left(\frac{1}{2}x - 3\right)\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$

Méthode

- On reconnaît l'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 3t$ et $b = 4$.

Solution

$A = (3t)^2 - 2 \times 3t \times 4 + 4^2$

$A = 9t^2 - 24t + 16.$

Revoir les bases

Ne pas confondre : $(3t)^2 = 3^2 \times t^2 = 9t^2$ avec $3t^2$.

- On reconnaît l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 5x$ et $b = 2$, puis le produit $2(4x-1)$.

Attention : il faut penser à mettre des parenthèses après le signe –.

$B = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 2 + 4 - (8x - 2)$

$B = 25x^2 + 20x + 4 - 8x + 2$

$B = 25x^2 + 12x + 6.$

Revoir les bases

Lorsqu'on enlève des parenthèses précédées d'un signe –, on change tous les signes dans les parenthèses.

- On reconnaît l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = \frac{1}{2}x$ et $b = 3$.

$C = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 3^2$

$C = \frac{1}{4}x^2 - 9.$

Mise en pratique

1 Développez.

a) $A = (5x-2)^2$

b) $B = \left(3x + \frac{5}{2}\right)\left(3x - \frac{5}{2}\right)$

2 Développez.

a) $A = (\sqrt{2} - 1)^2$

b) $B = (\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)$

c) $C = (2\sqrt{3} + 3)^2$

3 a) Développez les expressions des nombres :

$$X = (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2$$

et $$Y = (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{3}-1)^2.$$

b) X est-il un entier ? Y est-il un entier ?

4 On donne $U = \sqrt{8} - \sqrt{7}$ et $V = 2\sqrt{2} + \sqrt{7}$. Obtient-on $UV = 1$?

5 Développez puis réduisez.

a) $A = (2x+1)^2 + 2(x-4)$

b) $B = (3x-2)^2 - 4(x+2)$

6 Développez puis réduisez.

a) $C = (2x+3)^2 - (3x-4)^2$

b) $D = (x-5)^2 + (1-4x)^2$

c) $E = (4x-3)^2 - (2x+1)(3x-2)$

7 Quel est le coefficient de x dans le développement de l'expression :

$$F(x) = (3x+1)^2 - 4x(2x+1)\ ?$$

Annexe 2

OBJECTIF 1 Calculer les coordonnées du milieu d'un segment

Théorème 1. Les coordonnées du milieu I d'un segment [AB] sont $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.

EXERCICE RÉSOLU A Utiliser les coordonnées d'un milieu

Dans un repère (O ; I, J), on donne les points P(−1 ; 1), Q(2 ; −1) et R(−2 ; −4).

1. Calculez les coordonnées du milieu A de [PR].

2. On note S le point tel que PQRS est un parallélogramme. Placez S sur le dessin, puis calculez ses coordonnées.

Méthode

1. A est le milieu de [PR] et on connaît les coordonnées de P et R.
On applique le théorème 1.

- On conclut.

2. Pour placer S, on utilise le fait que les diagonales [PR] et [QS] ont le même milieu, ici A.

- PQRS est un parallélogramme, donc les diagonales se coupent en leur milieu.
- A est le milieu de [QS]. On connaît les coordonnées de A et Q.
On applique encore le théorème 1.
- On conclut.

Solution

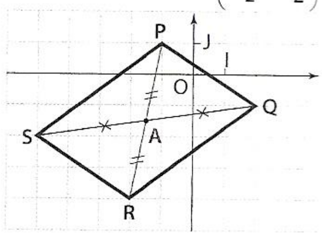
1. A est le milieu de [PR], donc :

$x_A = \frac{x_P + x_R}{2} = \frac{(-1)+(-2)}{2} = -\frac{3}{2}$;

$y_A = \frac{y_P + y_R}{2} = \frac{1+(-4)}{2} = -\frac{3}{2}$.

Les coordonnées de A sont $\left(-\frac{3}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$.

2.



PQRS est un parallélogramme, donc A est le milieu de [QS]. Donc :

- $x_A = \frac{x_Q + x_S}{2}$ d'où $-\frac{3}{\cancel{2}} = \frac{2 + x_S}{\cancel{2}}$; $x_S = -5$.
- $y_A = \frac{y_Q + y_S}{2}$ d'où $-\frac{3}{\cancel{2}} = \frac{-1 + y_S}{\cancel{2}}$; $y_S = -2$.

Les coordonnées de S sont (−5 ; −2).

Mise en pratique Pour tous les exercices, on se place dans un repère (O ; I, J).

1 **1.** On donne les points A(−1 ; 2) et B(3 ; 4). Le point C(1 ; 3) est-il le milieu de [AB] ?
2. Reprenez la question précédente avec A(−2 ; 3), B(−5 ; −1) et C(−3,4 ; 1).

2 On donne les points A(−5 ; 3), B(−4 ; −1) et C(1 ; −4).
1. Calculez les coordonnées du milieu E de [AC].
2. Déduisez-en les coordonnées de D tel que ABCD soit un parallélogramme.

3 On donne les points P(−3 ; 2), Q(4 ; 3), R(6 ; −3) et S(−1 ; −4).
Démontrez que PQRS est un parallélogramme.

4 On donne les points A(−1 ; 2), B(3 ; 4) et E(−2 ; −2).
Calculez les coordonnées de C et D tels que ABCD soit un parallélogramme de centre E.

5 On donne les points A(1 ; 3), B(5 ; 1) et C(6 ; 4).
1. Calculez les coordonnées du milieu D de [OC].
2. a) D est-il le milieu de [AB] ?
b) Quelle est la nature du quadrilatère OBCA ?

Annexe 3

OBJECTIF 2 Calculer des distances

Théorème 2. Dans un repère **orthonormé**, la distance AB entre deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ est telle que :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \text{ et donc } AB = \sqrt{AB^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\text{, car } AB \geqslant 0.$$

EXERCICE RÉSOLU B Utiliser le théorème 2

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on donne les points A(3 ; 4) et B(−1 ; 7).

1. Le triangle OAB est-il isocèle en A ?

2. Le point A est-il sur le cercle de centre C(−1 ; −3) et de rayon 8 ?

Méthode	**Solution**
1. Savoir si AOB est isocèle revient à comparer AB et AO, donc AB^2 et AO^2.	**1.** Calcul de AB^2 et AO^2.
• On applique le théorème 2.	$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ $= (-1-3)^2 + (7-4)^2 = 16 + 9 = 25$. $AO^2 = (0-3)^2 + (0-4)^2 = 9 + 16 = 25$.
• On conclut. Ne pas oublier de justifier que AB et AO sont positifs.	Donc $AB^2 = AO^2$, et comme AB et AO sont positifs, AB = AO. Le triangle AOB est isocèle en A.
2. Savoir si A appartient au cercle de centre C de rayon 8, revient à savoir si AC = 8 ou si $AC^2 = 8^2 = 64$. On applique le théorème 2.	**2.** Calcul de AC^2. $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2$ $= (-1-3)^2 + (-3-4)^2 = 16 + 49 = 65$. Or $8^2 = 64$, donc $AC^2 \neq 64$ et $AC \neq 8$.
• On conclut.	A n'appartient pas au cercle.

Mise en pratique Dans tous les exercices, le repère (O ; I, J) est orthonormé.

6 Le point P de coordonnées (5 ; 5) appartient-il au cercle de centre I (1 ; 2) et de rayon 5 ?

7 A a pour coordonnées (1,8 ; −3,5) et B(−1,8 ; 1,3).
À la calculatrice, calculez la distance AB.

8 Les points A, B, M ont respectivement pour coordonnées (−3 ; 0), (5 ; 2) et (2 ; −3).

1. Calculez MA et MB.

2. Le point M appartient-il à la médiatrice de [AB] ?

9 Les points M, N, P ont respectivement pour coordonnées (2 ; 0), $(-1\,;\sqrt{3})$ et $(-1\,;-\sqrt{3})$.

1. Calculez les longueurs MN, NP et PM.

2. Que pouvez-vous en déduire pour le triangle

10 Pour chacune des figures, le triangle ABC est-il isocèle en B ?