Didactique des mathématiques - Chevallard– Cours d’André Pressiat

Table des matières

Dans les premières séances de Didactique Fondamentale de la Discipline, une première mobilisation de l'enseignement des mathématiques était présentée : la Théorie des Situations Didactiques.

Elle est particulièrement adaptée à l'analyse et à la construction de processus d'enseignement (se déroulant sur un temps assez long, de plusieurs séances) dans lesquels le professeur à l'intention de faire rencontrer à ses élèves un objet mathématique nouveau et important par le biais d'une situation problème, avant d’en poursuivre l'étude.

<table>
<tr><td rowspan="6">Situation didactique</td><td colspan="2">Dévolution du problème</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Situation a-didactique</td><td>Situation d'action</td></tr>
<tr><td>Situation de formulation</td></tr>
<tr><td>Situation de validation</td></tr>
<tr><td colspan="2">Institutionnalisation</td></tr>
<tr><td colspan="2">Routinisation, familiarisation
Evaluation
Réinvestissement</td></tr>
</table>

Son originalité réside dans la partie appelée situation a-didactique que l'on peut définir ainsi :

Pour qu'un élève puisse affronter une situation non didactique (en dehors de l'école, par exemple), il est nécessaire que le professeur ait préparé ce passage de la situation didactique à une situation non didactique. Il doit donc proposer des situations (dites a-didactiques) que l'élève peut et doit gérer lui-même, sans faire appel à des raisons didactiques, et en l'absence de toute indication intentionnelle.

Cette modélisation est à l'origine du texte officiel recommandant :

- un enseignement des mathématiques fondées sur la résolution de problèmes,
- l'enseignement par activités.

Certaines activités présentées dans certains manuels ne répondent guère au cahier des charges d'une situation-problème.

Dans la suite, présentation d'une deuxième modélisation de l'enseignement des mathématiques.

Modélisation qui traite de toutes les situations d'enseignement des mathématiques, notamment les situations de reprise de l'étude d'un thème ou d'une notion mathématique.

Modélisation qui traite séparément :

- les mathématiques,
- leur didactique, c'est-à-dire la manière de les faire griller par les élèves, sous la direction du professeur.

Théorie anthropologique du didactique élaborée par Yves Chevallard

1 Modélisation de l'activité mathématique : notion d'organisation mathématique

Modélisation qui s'est diffusée sous le nom de théorie des 4 T.

Premier T : T comme « Type de tâches »

tâche t type de tâches T tâches relevant maths d'un type

Chacun peut citer de nombreuses tâches mathématiques :

1. Déterminer les nombres réels x tels que $x^2 + x - 1 = 0$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne 2^{2010} par 10 ?
3. Déterminer $1 + 3\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
4. Déterminer le jour de la semaine correspondant au 1er janvier 2035.
5. Déterminer les nombres réels x tels que $x^3 - x = \frac{1}{2}$
6. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 124 par 7.

Bien distinguer une tâche t et un type de tâche T.

Deuxième T : T comme « Techniques »

Soit T un type de tâches donné.

Une organisation mathématique (OM) relative à T précise une manière d'accomplir, de réaliser des tâches t relevant de T : à une manière de faire, τ, on donne ici le nom de technique (du grec $teckn$ê: savoir-faire).

Une OM relative à T contient donc un bloc [T, τ] qu'on appelle bloc pratico-technique et qu'on identifiera à ce qu'on appelle *un savoir-faire*.

Une technique ne réussit que sur une partie des tâches du type T auquel elle est relative, partie que l'on nomme *la portée* de la technique.

Exemple :

Toute technique de calcul sur $\mathbb{N}$ échoue à partir d'une certaine taille de nombres (Cryptographie et grands nombres).

Une technique τ n'est pas nécessairement de nature algorithmique, mais il semble exister une tendance assez générale à l'algorithmisation.

En une institution I donnée (par exemple l'enseignement des maths au lycée en France), à propos d'un type de tâche T donné, il existe en général une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues, à l'exclusion de techniques alternatives qui peuvent exister dans d'autres institutions.

Exemple :

Mettre sous la forme $a + b\sqrt{3}$ (a,b ∈ $\mathbb{Q}$), l'expression suivante :

$$A = \left(\sqrt{3} - 1\right)^3 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$

Dans un pays étranger, au cours d'une épreuve en temps limité, un étudiant en sciences de première année d'université arrive à la question suivante :

En introduisant une équation du second degré bien choisie, mettre sous la forme $a + b\sqrt{3}$ (a,b ∈ $\mathbb{Q}$), l'expression suivante :

$$A = \left(\sqrt{3} - 1\right)^3 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$

$x = \sqrt{3} - 1$ $\quad x + 1 = \sqrt{3}$ donc $x^2 + 2x + 1 = 3$ soit $x^2 + 2x = 2$ et par suite $x^2 = -2x + 2$

$x^3 = x(-2x + 2) = 2x - 2x^2 = 2 - 2(-2x + 2) = 6x - 4$

Or $x^2 + 2x = 2$ donc $x + 2 = \frac{2}{x}$

Et en remplaçant : $A = 6x - 4 + x + 2 = 7x - 2 = 7\sqrt{3} - 9$

Lorsque quelqu'un possède une technique τ relative à un type de tâches T, et qu'il est amené à exécuter fréquemment des tâches de ce type avec cette technique, ces dernières se routinisent, puis se naturalisent… … et ces tâches ne sont alors plus considérées comme des tâches et les techniques en question ne sont plus vues comme des techniques. Elles sont considérées comme naturelles, n'ayant jamais été apprises.

C'est le cas de presque toutes les techniques étudiées au collège et au lycée : elles sont naturalisées chez la plupart des étudiants et futurs professeurs.

Exercice :

Un élève du secondaire d'un certain pays (ou de Terminale C il y a 20 ans), ayant étudié la suite récurrente définie par : $u_{n+1} = 0{,}7u_n - 3$

et $u_0 = -9$ procède ainsi :

L'équation $x = 0{,}7x - 3$ a pour solution -10.

On a donc $u_{n+1} + 10 = 0{,}7(u_n + 10)$.

Il vient donc $u_n + 10 = 0{,}7^n(u_0 + 10) = 0{,}7^n$.

Donc $u_n = 0{,}7^n - 10$.

(u_n) est décroissante et converge vers -10.

Décrire et justifier la technique employée.

Troisième T : T comme « Technologie »

- Une technologie θ d'une technique est un discours rationnel (le logos) sur la technique τ, ayant pour premier objet de justifier « rationnellement » la technique τ , en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T, c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu.

Dans une institution I, quel que soit le type de tâche T, la technique τ est toujours accompagnée au moins d'un embryon ou, plus souvent encore, d'un vestige de technologie, θ.

Dans bon nombre de cas, certains éléments technologiques sont intégrés dans la technique.

Exemple :

Le petit discours en arithmétique élémentaire : Si 8 sucettes coûtent de 10 €, 24 sucettes, soit 3 × 8 sucettes, coûteront 3 fois plus, c'est-à-dire 3 fois 10 €.

Le fait que dans I il existe une technique canonique, en principe seule reconnue et seule employée, confère à cette technique une vertu « auto-technologique ». (Technique unique se justifiant elle-même).

- Une deuxième fonction de la technologie et d'expliquer, de rendre intelligible, d'éclairer la technique c'est-à-dire exposée pourquoi la technique permet de réaliser ce qui est attendu.

Exemple :

t : Quel est le quotient entier de 187 par 24 ?

τ : $24 = 6 \times 2 \times 2$

quotient de 187 par 6 : 31

31 par 2 : 15

15 par 2 : 7

Réponse : 7.

Une justification θ :

Soit (a, b) un couple d'entiers naturels non nuls. Soit q un entier naturel. q est le quotient de a par b si et seulement si :

$$\begin{cases} bq \leq a \\ a + 1 \leq b(q+1) \end{cases}$$

Justifier τ à l'aide de l'énoncé qui précède.

Autre exemple :

Justification des règles de calcul sur les quotients, par exemple celles relatives à l'addition : $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

Posons $\frac{a}{b} = Q, \frac{c}{b} = Q'$.

Définition d'un quotient :

$\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par a, donne b

$bQ = a$ et $bQ' = c$

$b(Q + Q') = a + c$

$Q + Q' = \frac{a+c}{b}$

Les 2 premières fonctions de la technologie :

- la fonction de justification (justifier que la technique permet d'accomplir ce qui est prétendu)
- la fonction d'explication (exposée pourquoi la technique permet de réaliser ce qui est attendu)

En mathématiques notamment dans les traités de haut niveau, la fonction de justification l'emporte traditionnellement, par le biais de l'exigence démonstrative, sur la fonction d'explication.

Il n'en est pas de même dans l'enseignement.

- Une troisième fonction correspond à un emploi plus actuel du mot technologie : la production de techniques.

Il existe des technologies potentielles en attentes de techniques. Certaines technologies disponibles sont sous-exploitées.

Exemple (au début du collège) :

La technologie des nombres fractionnaires (quotients de décimaux) permet d'engendrer une technique qui surclasse celle vue précédemment pour les sucettes.

Si a choses valent b Euros, alors x choses, c'est-à-dire $\frac{x}{a}$ fois a choses, vaudront $\frac{x}{a}$ fois b euros.

Exemple (en 4e) :

Le théorème des milieux est peu utilisé pour construire à la règle et au compas la parallèle à une droite passant par un point donné.

Quatrième T : T comme « Théories »

À son tour, le discours technologique contient des assertions, plus ou moins explicites, dont on peut demander raison.

On passe alors à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la théorie, Θ, laquelle reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique.

Régression à l'infini ?

Non. En fait, la description en 3 niveaux parenthèses (technique, technologie, théorie) suffit en fait à rendre compte de l'activité à analyser.

La théorie est souvent épanouissante, traitée par simple renvoi à une autre institution, réels ou supposés, censé détenir une telle justification : « On démontre que… ».

La nature de la théorie fluctue historiquement. Il y a un progrès théorique qui conduit en général à remplacer des évidences métaphysiques par des énoncés théoriques positifs. Exemple : le principe de récurrence.

Une théorie se distingue technologie par le fait qu'elle a une générale éviter plus grand générale activité plus grande, c'est-à-dire que davantage de résultats peuvent en être dérivés plus directement.

Exemples :

Milieux, centres de gravité de triangle et théorie des barycentres.

Théorème de Pythagore et résolution de triangles…

Mais ce n'est pas toujours le cas. Parfois il y a équivalence entre résultat théorique et un résultat technologique qui en découle il n'y a pas de différence de nature entre les 2 niveaux : c'est la raison pour laquelle on parlera souvent du niveau « technologico-théorique ».

Exemple :

Le résultat théorique Θ « L'ordre de $\mathbb{N}$ est un bon ordre » est équivalent au résultat technologique suivant :

Soit $P \subset \mathbb{N}$. Si $0 \in P$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$n \in P$" implique "$n + 1 \in P$", alors $P = \mathbb{N}$.

Savoir-faire et savoirs

Autour d'un type de tâche T, on trouve un triplé formé :

- d'une technique τ,
- d'une technologie θ,
- d'une théorie Θ.

Le tout, noté $[\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$ constitue une *organisation mathématique ponctuelle*, ainsi nommée parce qu'elle est relative à un seul type de tâches T.

Une telle organisation est donc constituée:

- d'un bloc pratico-technique $[\mathrm{T}, \tau]$,
- d'un bloc technologico-théorique $[\theta, \Theta]$.

- Bloc pratico-technique $[\mathrm{T}, \tau]$: un savoir-faire.
- Bloc technologico-théorique $[\theta, \Theta]$: un savoir.

Par métonymie on désigne couramment comme étant un savoir l'organisation $[\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$ toute entière, au même une partie quelconque de celle-ci.

Cette manière de faire encourage à *minorer le savoir-faire*, notamment dans la production et la diffusion des organisations mathématiques.

Une telle mise en avant du savoir n'est pas fortuite, car on ne rencontre que rarement des organisations mathématiques ponctuelles. Généralement, en une institution I donnée, une théorie répond de plusieurs technologies Θ_j, dont chacune à son tour justifie et rend intelligible plusieurs techniques τ_{ij} correspondant à au moins autant de types de tâches T_{ij} .

Dans l'enseignement des mathématiques, un thème d'étude (Pythagore, Thalès,…) est souvent identifié à une technologie déterminée θ (théorème de Pythagore, théorème de Thalès,…), ou plutôt au bloc de savoir $[\theta, \Theta]$ correspondant, cette technologie permettant de produire et de justifier, à titre d'application, des techniques relatives à divers types de tâches.

Lorsqu'on considère tous les types de problèmes et toutes les techniques qu'une même technologie θ permet de contrôler, on obtient une **organisation mathématique locale**, qui correspond à un thème d'étude (comme le produit scalaire en première). C'est un amalgame d'organisation mathématiques ponctuelles : $O = [\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$.

Les mathématiques		Discipline	
Organisation globale	$O = \bigotimes_{i,j,k} [\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$ Amalgame d'organisations régionales	Domaine d'études	
Organisation régionale	$O = \bigotimes_{i,j} [\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$ Amalgame d'organisations locales	Secteur d'études	Le professeur doit en extraire les organisations locales.
Organisation locale	$O = \bigotimes_{i} [\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$ Amalgame d'organisations ponctuelles	Thèmes d'études	Unité de compte pour le professeur. L'élève devra en extraire les organisations ponctuelles sur lesquelles il sera évalué.
Organisation ponctuelle	$O = [\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$	Sujet d'études	Se rencontre rarement dans les cours réels. Existe davantage pour l'élève qui est évalué sur T, qui définit pour lui un sujet d'étude à part entière

Exemple : le programme de Seconde jusqu'en juin 2009

- 3 domaines d'études appelés chapitres par les rédacteurs
  - Statistiques
  - Calcul des fonctions
  - Géométrie

- Le domaine statistique est scindé en 2 secteurs d'études :

  - Résumer et énumérer une série statistique
  - Simulation et fluctuation d'échantillonnage

- Le premier de ces 2 secteurs se divise en de telles d'études :

  - mesures de tendance centrale et de dispersion
  - distribution des fréquences d'une série statistique.

- Le premier de ces thèmes se laisse partager en 7 sujets d'étude:

  1. calcul de la moyenne d'une série statistique ;
  2. calcul de la médiane d'une série statistique ;
  3. détermination de la classe modale d'une série statistique ;
  4. détermination de la moyenne élaguée d'une série statistique ;
  5. détermination de l'étendue d'une série statistique ;
  6. utilisation des propriétés de linéarité de la moyenne d'une série statistique pour en calculer la moyenne ;
  7. calcul de la moyenne d'une série à partir des moyennes de sous-groupes.

2. Organisations didactiques et moments de l'étude. Praxéologie didactique.

21. Le didactique, dimension du réel social.

Étudier une question

- Dans la vie sociale, demande d'information ou question au sens faible.

Exemples :

  - Où se trouve le bureau de poste le plus proche ?
  - Quelle heure est-il ?
  - Quel âge avez-vous ?
  - Quel est notre longitude ?
  - $4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$, c'est bien irrationnel, non ?
  - C'est vrai que $n^3 + 12n$ est divisible par 6 quel que soit n dans $\mathbb{N}$?

à laquelle le questionneur attend une réponse au sens faible (énoncé apportant la réponse demandée), l'hypothèse étant que la personne questionnée connaît la réponse, ou peut la connaître à peu de frais.

- Les choses changent quand la personne questionnée ne connaît pas la réponse.

Si elle dispose d'une organisation (mathématique ou autre) relative aux types de tâches considérées, elle peut la mettre en œuvre, éventuellement de manière *routinière*.

Sinon, la tâche est *problématique* pour elle. La question posée se mue en question au sens fort.

- Comment déterminer la longitude ?
- Comment déterminer si ce nombre rationnel ?

La réponse à une question au sens fort est une organisation à construire.

En nombre de cas, une personne ou un collectif confronté à une question au sens fort répond en *niant cette problématicité*, par exemple en accomplissant à la page en question, en faisant autrement.

Dans le cas contraire la personne x ou le collectif X, va se mettre à étudier la question posée, que l'on peut noterτ_T T désignant le type de tâches considérée. Se constitue alors un système d'étude ou système didactique, noté $\mathrm{S}[\mathrm{X}, \tau_{\mathrm{T}}]$.

Dans certains cas, le collectif X sera aidé, voir dirigé par un aide à l'étude ou un directeur d'études, y : on notera $\mathrm{S}[\mathrm{X}, \mathrm{y}, \tau_{\mathrm{T}}]$ alors le système didactique ou $\mathrm{S}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \tau_{\mathrm{T}}]$ s'il y a un collectif d'aide à l'étude.

On entre alors dans une dimension spécifique du réel social : la dimension *de l'étude* ou *du didactique*.

L'activité d'étude est une source permanente de troubles possibles pour la vie des institutions. C'est pour limiter les effets perturbant du didactique on a créé l'école, *la skolê* des anciens grecs : *du temps prélevé sur le temps du labeur, de la vie ordinaire pour être consacré à l'étude*.

22. Les moments de l'étude

Pour une organisation mathématique ponctuelle $\mathrm{O} = [\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$, on distingue **six moments réunis en quatre groupes**. Ce sont des types de situations qui sont nécessairement présents dans l'étude, de manière très variable.

La notion de « moment » ne renvoie pas à une structure temporelle mais plutôt à une dimension dans un espace en comportant plusieurs, à un facteur dans un processus ou plusieurs facteurs interviennent.

Groupe 1 Activités d'études et de recherches (AER)

1. ***Moment de la première rencontre avec les T***
   - Ce moment est essentiel pour donner du sens au type de question, pour comprendre quel type de tâches ou type de questions on va s'occuper par la suite.
   - Ce moment de première rencontre peut se reproduire plusieurs fois, comme on redécouvre une personne que l'on croyait connaître.

2. ***Moment de l'exploration de T et de l'émergence de la technique τ***

   Chevallard considère que l'élaboration de techniques relatives à des types de problèmes est au cœur de l'activité mathématique.

   L'organisation actuelle de l'étude en sous-estime parfois l'utilité, allant jusqu'à réduire cette élaboration à une simple juxtaposition de techniques toujours nouvelles pour des problèmes toujours nouveaux (Mac Gyver). À cette vision de l'élève, Chevallard oppose celle d'un apprenti, qui comme ses autres camarades, et sous la conduite d'un maître artisan, met au point des techniques mathématiques.

3. ***Moment de la construction du bloc technologico-théorique***

   Ce moment est en interrelation étroite avec chacun des autres moments.

Traditionnellement et pour des raisons d'économie apparente de temps, les stratégies d'études font de ce moment technologico-théorique la première étape de l'étude, ce qui permet de traiter d'un seul coup la technologie θ contrôlant de nombreuses techniques et de nombreux types de problèmes, qui pourront ainsi apparaître comme des applications de .

Groupe 2 Synthèses

4. ***Moment de l'institutionnalisation.***

   L'institutionnalisation a pour objet de préciser l'organisation mathématique, en distinguant :

   - les éléments qui, tout en ayant contribué à sa construction, seront laissés de côté
   - les éléments qui rentreront de manière définitive dans l'organisation.

   Les élèves sont de même très clairement conscient de la nécessité d'un tel tri, qui sollicite parfois du professeur en lui demandant « Et cela, faudra-t-il le savoir ? ».

   C'est la phase d'institutionnalisation qui relance l'étude, en contribuant à mettre en évidence tel ou tel type de problème qui n'a pas encore été étudié ou ne l'a pas encore été suffisamment.

Groupe 3 Exercices et problèmes

5. ***Moment du travail de l'organisation mathématique (et en particulier de la technique).***

   Le but est ici d'améliorer la fiabilité et l'efficacité de la technique, pour toute la place.

   En même temps, ce moment fourni l'occasion à celui qui étudie d'améliorer sa propre maîtrise de la technique.

Groupe 4 Contrôles

6. ***Moment de l'évaluation.***

   Il s'articule au moment de l'institutionnalisation :

   le professeur évalue les rapports personnels que les élèves ont avec l'organisation mathématique en les référant à la norme que le moment d'institutionnalisation a élaborée.

   En pratique il arrive un moment où l'on se doit de faire le point, en examinant ce que *vaut* ce qui a été appris.

   L'évaluation doit être entendue en un sens plus large : au-delà de l'évaluation des personnes se profile l'évaluation de la norme elle-même. Que vaut l'organisation mathématique qui s'est construite et institutionnalisée ?

La tâche de base du professeur consiste à (re)construire, à mettre en place des Organisations Mathématiques locales en coopération avec ses élèves, en réalisant le moment de l'étude.

23. Exemple d'Activité d'Etude et de Recherche

M. Durand souhaite cultiver des salades. Pour cela il jardine sur une partie de son terrain de forme rectangulaire ayant les dimensions suivantes : 11,3 m et 4,9 m.

Il veut retrouver l'air de ce terrain. Pouvez-vous l'aider ?

Essayez de trouver une méthode pour calculer l'aire de son terrain.

P : une fois que vous avez collé l'activité, vous essayez de faire cette activité, d'accord ? Alors, je vous laisse chercher pendant 5 minutes. Vous commencez et on se trouve dans 5 minutes.

[…]

Jérémie : c'est pour l'exercice.

P : pour l'exercice. Alors, tout le monde écoute ; on va passer à un début de correction de l'activité. On va ainsi de trouver comment faire pour trouver l'aire. Alors, Jérémie qu'est-ce que tu penses ?

Jérémie : moi, j'ai additionné d'abord. J'ai fait 2 fois 11 fois 3 et 2 fois 4,9 euh… 2 × 11,3 et après je les ai additionnés…

P : avec 2 fois… Alors qu'est-ce que vous en pensez les autres ? Jérémie, ce qu'il a fait, c'est : 2x 11,3 m plus 2x 4,9 m

P : c'est ça Jérémie ?

Jérémie : oui

P : qu'est-ce que vous en pensez les autres de ça ?

Un élève répond : c'est bon !

Un autre : non

P : là, qu'est-ce qu'il y a qui ne va pas ? Sébastien ?

Sébastien : là, il a calculé le périmètre !

[…]

Nadège : on va faire une multiplication

[…]

Nadège : 11,3 × 4,9

P : pourquoi as-tu pris ces 2 nombres ? Marion ?

Marion : parce que la cellulaire

P : d'accord alors là qu'est-ce qu'on peut écrire ?

P note au tableau, sous la dictée des élèves :

$A = L \times l$

Un élève : je l'avais fait

B : Jonathan, tu peux me dire la longueur combien est le veau ?

Jonathan passe au tableau mais ne sait quoi écrire.

P : qui peut l'aider ? Cédric ? Delphine ?

Delphine écrit :

L= 11,3 l=4,9 m

[…] P reprend : donc il va falloir faire quoi comme calcul ?

Sébastien : une multiplication. Longueur fois largeur et ça va nous donner l'aire.

Sébastien écrit :

= 11,3 × 4,9

Une élève répond qu'il faut ajouter l'unité (mètre et mètre), ce que fait Sébastien au tableau.

= 11,3m × 4,9m

V : alors, maintenant, ce qu'on va faire c'est la multiplication. Alors, vous savez faire avec des virgules ? Des élèves répondent oui.

P : alors vous la faites ! Tu ranges ta calculatrice […]

Un élève :Monsieur, moi j'ai trouvé 55,37.

[…]

P : Marion, tu as trouvé combien ?

Marion : 353,7

Des élèves protestent

P : chut, on se tait pour l'instant !

P écrit au tableau :

A= 553,7 m²

Six doigts se lèvent. Celia propose 146,9, d'autres réponses sont données que P note au tableau

A=146,9 m²

A=55,37 m²

A=55,21 m²

Le moment de la première rencontre.

Ce moment se réalise de préférence en classe entière : relançant l'aventure intellectuelle de la classe, il doit être vécu par l'ensemble des membres de ce collectif d'étude qu'est la classe. Dans cet épisode, la rencontre des élèves avec la problématicité du calcul du produit de de décimaux n'a pas encore eu lieu.

Aides élèves continue de proposer des solutions.

B : Sébastien ! Vous ne grillez pas !

Jérémie : cent 55,37 parce qu'il y a 2 chiffres après la virgule !

P : pourquoi ? Sébastien ? Marion ?

Marion : pour connaître le résultat il va falloir compter combien il y a de chiffres qui sont après la virgule.

P : c'est un problème : chacun a ses méthodes.

Jérémie : c'est ce que j'ai dit ça !

P : alors ici, pour être sûr du calcul… On sait faire les multiplications sans les virgules ?

Les élèves approuvent.

P : alors qu'est-ce qu'on pourrait faire sans les virgules ?

Les élèves : enlever les virgules !

Un élève : au début on la met pas la virgule, mais après on la mettra.

P : alors, je ne voudrais plus qu'il y ait 11,3 m, je ne veux plus qu'il y ait une virgule… Mais je veux garder un résultat qui soit exactement vrai. C'est-à-dire je ne veux pas qu'on me dise on enlève et après on verra à la fin, sinon la, on ne sait pas ce qui se passe ! Ce c'est clair ? Oui ?

Plusieurs élèves donnent des réponses, ce qui se conclut par P

P : comment tu sais qu'il faudra décaler la virgule ? Sébastien ?

Sébastien propose de faire la multiplication sans tenir compte des virgules et après que l'on ait ajouté « de la déplacer d'un autre rang.

Lounès : si c'est 2 chiffres après la virgule, dans la multiplication, et ben quand on fait le résultat, on met la virgule en dessous.

P : vous avez entendu ce qu'il dit Lounès ? Il dit que dans la multiplication, on aligne les chiffres avec les virgules dessous, et puis à la fin, on alignera la virgule avec le résultat. Quand c'est qu'on faisait ça ?

Une élève : dans des additions

D'autres : dans des soustractions

P : c'est ça, on alignait les virgules d'abord, puis après on pouvait faire le calcul. Mais ici, le problème on ne sait pas pour les multiplications !…

Les élèves veulent proposer des solutions.

Le moment exploratoire.

Il voit l'exploration du type de tâches rencontrées et l'émergence de la technique qui permet de l'accomplir.

L'étude et la résolution d'un problème particulier va toujours de pair avec la constitution d'au moins un embryon de techniques, à partir de quoi une technique plus développée pourra éventuellement émerger : l'étude d'un problème particulier apparaît comme un moyen pour qu'une telle technique se constitue.

Ainsi, étudier des problèmes en situation d'études et de recherches (activités), est un moyen permettant de créer et de mettre au point une technique relative au problème du même type, technique qui elle-même sera le moyen de résoudre des problèmes de ce type, en situation de réponse à une question posée (exercices et problèmes).

P : non, ici, vous écoutez la consigne. On va essayer d'avoir autre chose que 11,3. Je veux plus 11,3. Alors qu'est-ce qu'on peut faire ?

Sarah propose de multiplier par 10

P : Sarah nous dit « on multiplie par 10 ». Ce sera quoi ?

Un élève répond : 113

P : ça sera quoi 113 ?

Des élèves proposent : mètres, centimètres, décimaient. D'autres indiquent décamètres, hectomètres, kilomètres d'un tableau de conversion.

P : d'accord. On va faire une… Conversion, répondent les élèves.

Conversion :

11,3 m =

4,9 m =

P : vous convertissez dans une unité où il n'y a pas de virgule.

P circule dans la classe : alors vous faites les conversions. Je répète : on va faire les conversions pour qu'il n'y ait plus de virgule ; de façon à ce qu'il dit et que des nombres entiers.

Plusieurs élèves déclarent qu'il faut faire un tableau. P répond aux questions, vérifie les résultats, donne des conseils au cours de son déplacement dans la classe. Il est 8:30.

P : Walid, tu viens le faire au tableau et Leïla, tu viens compléter ; ça, vous prenez pas pour l'instant.

Walid dessine un tableau de conversion dans lequel il ménage 2 colonnes par unité.

[…]

Des élèves : les aires !

P : alors, qui peut l'aider, qui peut lui dire comment on fait ?

une dizaine de doigts se lève et Joséphine est désignée. Joséphine : alors je lui dicte ; alors première colonne à droite, millimètres, centimètres, décimètres.

Walid réalise le tableau de conversion sous la dictée.

[…]

A 8:35, Walid retourne à sa place, tandis que P demande comment on fait pour placer 11, 3 dans le tableau.

P : alors est-ce qu'on peut calculer l'aire maintenant et en être sûr ? Jonathan ?Délia ? C'est quoi qu'on calcule ?.

Un élève : 113 × 42

L'élève envoyé au tableau. P. note :

11,3 m est l'élève pose la multiplication : 113 dm
X 49 dm

P : tout le monde le faire en même temps que lui

L'élève au tableau continue d'effectuer la multiplication.

P : c'est quoi l'unité à la fin ?

Des élèves. Dm

P : décimètres ? Tout le monde est d'accord ? C'est quoi ici ?

P indique la ligne des résultats : alors, c'est quoi ici ?

Des élèves : l'aire, dm^2

j'ai : le point G P : tout est OK ? Tout le monde a noté?

P : on a multiplié par 10. Et pour passer de là à là ?

Un élève : par 10 pareil ?

P : et ici, il va falloir mettre en m^2

Au tableau, le calcul est devenu :

11,3m--------------------------→x10---------------------------------------→113 dm
X4,9m--------------------------→x10---------------------------------------→49 dm
1017
452.
______ ←-------------------------m^2--- 5537dm^2

Il est 8 :40.

P : alors, tout le monde a essayé de trouver ici comment on passe des dm^2 aux m^2 ?

Des élèves répondent : on divise par 100.

P : on divise par 100. Tout le monde est d'accord ?

Les élèves répondent : oui

P: OK ; ça fait combien ?

Les élèves donnent la réponse.

P : alors, vous avez vu que là on a multiplié par 10, puis encore par 10. On revient en divisant par 100. Avec les unités, c'est pratique et là on est sûr du résultat ; ç'est bon pour tout le monde?

Les élèves approuvent, et le tableau devient :

452

55,7m^2←---m^2 ---5537dm^2

Le moment de la constitution de l'environnement du savoir mathématiques relatif à la technique.

Ce moment permet la production (fabrication), la justification et la compréhension de la technique à l'aide d'un ensemble raisonné de savoirs auxquels il réfère.

Conclusion

Les Activités d'Etude et de Recherche vérifient 3 moments:

- première rencontre avec un problème relatif aux types de tâches dont l'enseignement est visé et qui va le motiver d'un point de vue mathématique,
- exploration du type de tâches rencontrées et émergence de la technique,
- constitution de l'environnement du savoir mathématiques relatif à la technique.

On peut alors passer au moment de la synthèse qui constitue le cours proprement dit. Il restera encore à appliquer les techniques enseignées (exercices et problèmes) et à évaluer l'apprentissage.

Concevoir une activité d'études et de recherche

une activité d'étude et de recherche bâtie autour d'une question qui conduit les élèves à l'étude par la recherche, un sujet voir d'un thème du programme.

24. Comment concevoir des AER ?

1. Une question de fond que tout professeur doit se poser avant de commencer la préparation de son cours est la suivante :

« Quelles sont les raisons d'être de X ? », X pouvant prendre les valeurs : la trigonométrie, les nombres, l'algèbre, les fonctions, la statistique, le triangle, les vecteurs, etc.

qui peut encore se dire de la manière suivante :

- Y a-t-il une question mathématique, ou faisant appel aux mathématiques, pour lesquelles la réponse pourrait générer le savoir, ou une partie du savoir à enseigner ?
- Ces questions sont-elles transposables, et alors sous quelle forme de manière à ce que les élèves s'en saisissent et tenter l'élaboration de réponses, avec les connaissances dont ils disposent ?
- Comment faire pour les guider, diriger l'étude en classe de cette ou ces questions, et de la production des réponses ?

Conséquences :

- Dans une AER, l'étude est à faire : le questionnement va souvent procéder en recherche de solution,
- Dans un énoncé de DS, l'étude est supposée avoir été déjà faite, et a même été rédigée (par le professeur), mais de façon lacunaire : il revient à l'élève de combler les lacunes ménagers à son intention.

  Constat :

  Beaucoup des activités proposées et utilisées en classe sont des exposés lacunaires de solutions comme c'est le cas de l'énoncé d'un DS.

2. Comment faire ensuite, dans un 2e temps, une fois trouvée une question génératrice ?

La direction d'une AER visant à résoudre le problème proposé devra ainsi, à l'opposé d'activité-DS, s'appuyer sur des questions cruciales, à l'aide desquelles le professeur aidera les élèves a progresser dans processus de production de se demandée.

C'est à l'aide d'une telle liste de questions cruciales que le professeur dirige l'AER et que les élèves rencontrent des mathématiques qui, souvent, ne peuvent se dire dans l'ordinaire des classes. Il lui faut alors apprendre à poser des questions cruciales, et peu a peu, certes la classe et chaque élève apprennent à (se) poser de telles questions et à y répondre.

Les questions cruciales sont ainsi l'outil principal de la direction d'AER.

Exemple pour l'AER précédente :

Pourquoi et en quoi les virgules des nombres décimaux gênent-elles le calcul de leur produit ?

N'y aurait-il pas un moyen de s'en « débarrasser provisoirement », puisqu'on sait facilement calculer des produits entiers ? Qu'est-ce qui, dans les mathématiques, nous « autoriserait » à procéder ainsi, sans les virgules ?

3. Évaluer une organisation mathématique

Un schéma universel, un geste fondamental

- observer l'objet
- décrire et analyser l'objet
- évaluer l'objet
- développer l'objet

Schéma mis en oeuvre

par un professeur :

qui prépare son cours à partir des manuels

qui s'occupe des solutions produites par ces élèves.

Par un élève :

qui fabrique sa solution

31. Evaluer les types de tâches

On se place dans lequel une organisation mathématique locale.

Quelques critères :

- critères d'identification
  - Les types de tâches sont-ils clairement dégagés et bien identifiés ?
  - Sont-ils représentés par des corpus effectivement disponibles de spécimens suffisamment nombreux et adéquatement calibrés ?
  - Au contraire ne sont-ils connus que par quelques spécimens peu représentatifs ?

- critères de raisons d'être
  - les raisons d'être des types de tâches sont-elles clairement explicitées ?
  - ou au contraire ces types de tâches apparaissent-ils immotivés ?

- critères de pertinence
  - les types de tâches fournissent-ils un bon découpage relativement situations mathématiques les plus souvent rencontrés ?

- sont-ils pertinents au regard des besoins mathématiques des élèves, pour aujourd'hui ? Pour demain ?
- Ou au contraire apparaissent-ils comme des isolats sans lien véritable avec le reste de l'activité mathématique et extra-mathématique des élèves?

32. Evaluer les techniques

- Les techniques sont-elles effectivement élaborées, seulement ébauchées ?
- Sont-elles faciles à utiliser ?
- Leur portée est-elle satisfaisante ?
- Leur fiabilité est-elle acceptable ?
- Sont-elles suffisamment intelligibles ?
- Ont-elles un avenir et pourront-elles évaluer de manière convenable ?

33. Évaluer des technologies

Etant donné un énoncé

- Le problème de sa justification est-il seulement posé ?
- Ou bien cet énoncé est-il considéré tacitement comme allant de soi, évident, naturel ou encore bien connue ?
- Les formes de justification sont-elles proches des formes canoniques en mathématiques ?
- Sont-elles adaptées à leurs conditions d'utilisation ?
- Les justifications explicatives sont-elles favorisées ?
- Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement exploités de façon optimale ?