Comment décrire et analyser l'activité mathématique ?

Cadres et registres

Raymond Duval, Université du Littoral, IUFM Nord Pas de Calais

L'apport de Régine Douady à la recherche didactique est d'avoir exploré jusqu'où on pouvait faire mettre en résonance «le travail du maître et des élèves dans la classe» avec «l'activité des mathématiciens» (R. Douady 1992, p. 132). Elle est partie de l'idée que les situations scolaires d'apprentissage devaient d'abord mettre l'élève «en activité mathématique» (1986, p.9), et cela dès l'école primaire (1984). C'est dans cette perspective qu'elle a élaboré l'hypothèse globale suivante (1986, p.9) :

> On peut construire effectivement des connaissances mathématiques en faisant jouer ***la dialectique outil-objet*** au sein de ***jeu de cadres*** appropriés, grâce à des problèmes répondant à certaines conditions.

Cette hypothèse, qui se réfère à une description épistémologique du travail du mathématicien, présuppose évidemment que l'activité mathématique ne mobilise rien d'autre que les structures cognitives les plus communément partagées par tous les individus, mathématiciens ou non mathématiciens, sujets cultivés ou non cultivés. Cela revient à postuler un certain «isomorphisme», «partiel» (Piaget 1967), entre les démarches mathématiques et le fonctionnement cognitif commun à tout individu. Mais l'importance communément accordée à la «résolution de problème» en dehors des mathématiques pouvait alors être considérée comme suffisante pour justifier une telle présupposition.

De mon côté (Duval 1988 a, b ,c), les observations faites sur la discrimination des représentations graphiques, sur la complexité de la «lecture» des figures en géométrie ainsi que sur les conditions de la découverte de la démonstration, m'ont conduit à souligner l'importance des différents registres de représentation sémiotique utilisés en mathématiques et à mettre en évidence les difficultés durables, souvent insurmontables, que créent les changements de registres exigés par l'activité mathématique. La compréhension n'émergeant chez les sujets qu'avec la coordination d'au moins deux registres de représentation, celle-ci devient un enjeu essentiel pour l'apprentissage des mathématiques. Que cela entraîne la remise en question de l'hypothèse d'un «isomorphisme» entre les démarches mathématiques et le fonctionnement cognitif commun à tout individu importe peu ici. Le problème explicitement posé, pour déterminer les conditions d'un apprentissage *par tous* les élèves jusqu'au Lycée, est celui de savoir ce qui fait la spécificité de l'activité mathématique au regard des autres activités de connaissance et ce qu'elle exige comme structure(s) de fonctionnement pour pouvoir être vraiment pratiquée.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici la complexité à laquelle doit faire face tout essai d'analyse de ce qu'est l'activité mathématique. En tant qu'elle ouvre un champ de connaissances, il est nécessaire *de partir des objets* qu'elle permet de découvrir ou de construire. Mais en tant que qu'elle est une activité, il est non moins nécessaire de *partir de la manière dont le sujet fonctionne* quand il «fait» des mathématiques, ainsi que R. Douady l'a fortement et justement montré. Cependant, regarder le sujet «en activité mathématique» est loin d'être une démarche simple ou univoque. Car le fonctionnement du sujet peut être analysé en fonction des objets à manipuler, à utiliser ou à transformer : dans ce cas, les opérations cognitives que le sujet doit accomplir risquent d'être décrites par rapport aux seules opérations mathématiques. Mais le fonctionnement du sujet peut aussi être analysé en fonction des systèmes internes (de représentation ou autres) qui doivent être mobilisés pour que le sujet ait accès aux objets mathématiques et qu'il puisse en diriger et en contrôler les transformations : dans ce cas les opérations mathématiques doivent être situées par rapport aux opérations cognitives qui les rendenr effectives chez un sujet. Autrement dit, dans l'analyse du fonctionnement du sujet, nous retrouvons cette dualité des points de vue qui est inhérente à l'étude de toute acquisition de connaissances. (Duval 1998b p. 167-179). En partant de la manière dont le mathématicien fonctionne quand il fait des «maths», R. Douady a privilégié la première voie d'analyse : elle a été ainsi conduite à analyser l'activité mathématique *du côté des différentes organisations d'objets mathématiques au sein desquelles le mathématicien est amené à «circuler»* quand il travaille. En partant des problèmes récurrents de compréhension, rencontrés par les élèves dans les différents domaines mathématiques, nous avons privilégié la seconde voie : cela nous a conduits à regarder l'activité mathématiques *du côté de l'architecture cognitive requise pour accéder à la variété des objets et des démarches mathématiques* (dans les domaines numériques, géométriques, algébriques, etc.) auxquels l'enseignement confronte les élèves jusqu'au Lycée.

Évidemment, les questions de l'articulation de ces deux points de vue sont celles qui viennent le plus immédiatement. Ces deux approches se recouvrent-elles ou sont-elles réellement différentes ? L'activité mathématique apparaît-elle de la même manière selon que l'on adopte l'un ou l'autre point de vue ? Et , finalement, comment interpréter des divergences éventuelles d'analyse par rapport au problème évoqué plus haut ? En réalité, pour être en mesure d'y répondre, il faut d'abord remonter aux questions que la description et l'analyse de l'activité mathématique conduisent à se poser, quel soit le point de vue adopté. Et si une comparaison doit être entreprise, elle doit d'abord l'être au niveau de ces questions directrices pour toute analyse de l'activité mathématique. Il nous semble qu'elles sont de trois types :

1. celles relatives à l'identification des processus constituant la dynamique de l'activité mathématique,

2. celles relatives aux conditions d'une développement de l'activité mathématique chez les élèves,

3. celles relatives aux rapports entre résolution de problème et situation d'apprentissage.

Nous venons d'employer le mot, inévitable mais peut-être trompeur, de «comparaison». Il peut être en effet trompeur dans la mesure où il laisserait entendre que l'on ferait ici un exposé parfaitement équilibré et neutre des deux approches. Ce qu'évidemment je suis le plus mal placé pour faire, étant totalement impliqué dans une approche et n'ayant jamais réellement pratiqué l'autre. Mais regarder comment l'analyse du fonctionnement du sujet «en activité mathématique» faite dans une perspective des changements de cadre peut s'inscrire dans celle faite dans une perspective de registres permet d'expliciter l'ensemble des questions à prendre en compte pour décrire et pour analyser, d'une manière pertinente et pas trop incomplète, ce qu'est l'activité mathématique. Bref, la comparaison se fera sur le mode d'une présentation en contrepoint. Et, en ce sens, nous espérons contribuer à la réflexion sur ce problème dont R. Douady a montré qu'il était fondamental pour la didactique.

1 La «dynamique» propre à l'activité mathématique : de quelle nature sont les processus cognitifs en jeu ?

C'est dans la recherche de la solution d'un problème que la dynamique propre à l'activité mathématique peut être le mieux observée. Ce qui, en effet, apparaît le plus frappant dans cette situation, c'est que la recherche requiert *des changements de direction de la pensée qui apparaissent comme des ruptures* parce qu'ils ne semblent pas découler des données de la phase juste antérieure. Tout se passe comme s'il fallait brusquement changer la manière de représenter les données, ou penser à autre chose, à l'encontre du déroulement spontané du jeu d'associations qui a été induit par la première compréhension du problème ou les premiers traitements engagés. En rappelant que l'activité du mathématicien consiste dans le travail de recherche, R. Douady a montré que les changements de direction de pensée étaient au coeur de l'activité mathématique. Mais, même après coup, pour celui a cherché sans succès à résoudre un problème, cette caractéristique est frappante. Car lorsqu'on lui explique la solution, ou plus simplement lorsqu'on lui suggère des idées pour le mettre «sur la voie», c'est avec étonnement qu'il découvre les transformations de données ou de manière d'appréhender un objet auxquelles il aurait dû penser. Et souvent, il n'arrive pas à comprendre comment il aurait pu y penser. Ce qu'un élève de cinquième, il y a plus de trente ans, nous expliquait ainsi : «les maths, ça n'est pas logique !».

L'intérêt de la notion de «cadre» et de celle de «registre de représentation sémiotique» est de porter directement sur cette dynamique propre à l'activité mathématique, pour tenter de décrire avec précision les changements de direction de pensée qu'elle génère et pour en identifier les processus sous-jacents. Abordant l'analyse de l'activité mathématique à partir des mêmes phénomènes typiques, il n'y a donc rien de surprenant à ce que, d'une manière ou d'une autre, chacunedes deux approches rencontre les mêmes questions directices. En dressant ainsi la liste des questions directrices que l'on rencontre nécessairement, il est facile de dresser un tableau synoptique des deux approches (Figure 1). Mais un tel tableau, utile voire nécessaire pour des raisons d'économie (par exemple pour suivre plus facilement l'exposé des démarches, en en situant les différents moments, ou pour en rassembler synthétiquement toutes les informations) peut être un sérieux obstacle à la compréhension de la problématique propre à chaque approche. En effet, ce ne sont pas les colonnes 2 et 3 de ce tableau qui sont essentielles mais la colonne 1. Si un examen attentif des analyses faites en termes de cadre et en termes de registre montre qu'aucune des questions directrices n'est ignorée dans les deux approches (le fait que les deux colonnes soient également remplies suffit à l'attester), en revanche, *toutes les questions directrices n'y ont pas la même importance : on ne leur accorde pas le même ordre de priorité*. Et c'est là, nous semble-t-il, que s'impulsent les différences ou les divergences que l'on peut noter. La différence des réponses dans les colonnes 2 et 3 résultent d'abord de la différence de l'ordre d'importance donné aux différentes questions directrices. Pour prendre une image, le tableau ci-dessous devrait être regardé comme une carte en relief : on verrait alors que, d'abord dans la colonne 1 et par suite dans les colonnes 2 et 3, certaines lignes correspondent à des cîmes dans une approche et à des creux dans l'autre ! Le relief visualiserait ainsi la différence des problématiques. Ce sont les logiques propres à chacune que nous allons essayer d'expliciter ici, en sachant bien que les pratiques réelles peuvent peuvent en réalité déborder les logiques ou ne pas s'y réduire. Mais une telle tentative n'est peut -être pas inutile pour avancer dans une analyse de ce qu'est l'activité mathématique commandée par des préoccupations d'apprentissage.

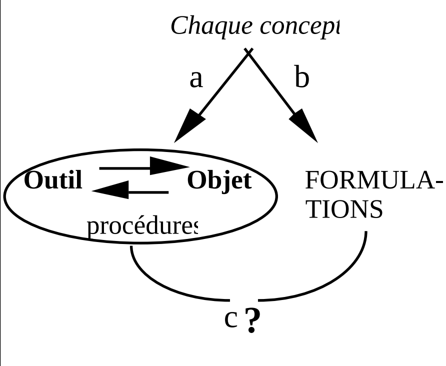
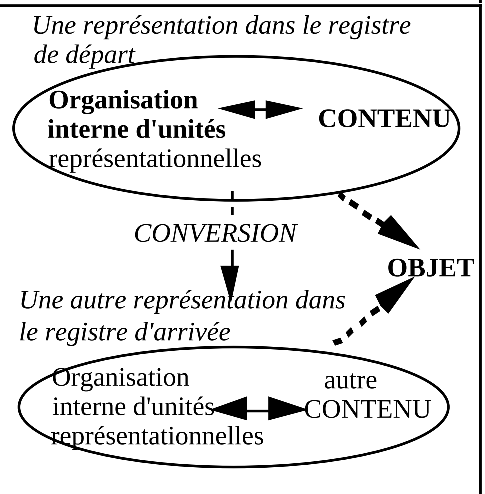
Questions directrices pour l'analyse de l'activité mathématique	CADRE	REGISTRE
I. Comment peut-on DISTINGUER les différents *cadres* et les différents *registres* ?	Un ensemble de concepts susceptibles d'être organisés en une progression théorique une branche des mathématiques	un système sémiotique producteur d'un type de représentations, et dont la production peut répondre à des fonctions cognitives différentes.
II. 1 Comment DéCRIRE l'opération du CHANGEMENT ?	— une **réinterprétation** portant sur la formulation des problèmes à résoudre	— une **conversion** portant sur des unités de représentation, mais conservant la référence de la représentation de départ
2 Qu'apporte un changement ?	— une **création d'objets mathématiques** nouveaux ou des «mises en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas» (1986, p11)	— r**endre explicites d'autres propriétés** de l'objet **permettre des traitements** impossibles ou **trop coûteux dans le registre de départ**
3. Quelle transparence des correspondances entre les données avant et celles après ?	— «**correspondances imparfaites**»	— **congruence** ou **non congruence** entre les unités respectives des représentations de départ et d'arrivée
4. Quelles conditions pour comprendre le processus du changement ?	— utilité du **recours à «un cadre auxiliaire de représentation»**	— **discrimination entre les variations de représentation dans un registre** qui entraînent une variation de représentation dans l'autre registre et celles qui ne changent rien
III Quelles sont LES DISTINCTIONS OPéRATOIRES UTILISéES POUR ANALYSER LE FONCTIONNEMENT de *l'activité mathématique ?*		

Figure 1. Les problématiques de changement de cadre et de registre

Nous avons regroupé les questions relatives à la nature des processus propres à la dynamique de l'activité mathématique dans le deuxième bloc de lignes de ce tableau. Les deux premières (II. 1, II.2) sont celles qui s'imposent quasi-immédiatement dès que l'on reconnaît dans l'opération de changement de direction de la pensée une caractéristique fondamentale de l'activité mathématique. C'est donc par une examen de la place donnée à ces deux questions dans les deux approches que nous allons commencer.

1.1 L'opération de changement de « ...» : quel degré de complexité ?

Si l'on s'en tient à ces deux premières questions, les différences entre les deux approches peuvent paraître minimes. Pourtant, dans l'une, le changement de «…» est vu comme un mouvement de pensée plus ou moins naturel dans la mesure où il ne soulèverait —du moins *rétroactivement*— aucune difficulté insurmontable. Mais dans l'autre on en souligne, au contraire, la complexité intrinsèque qui le rend, pour les élèves, souvent impossible à concevoir *proactivement* et même,parfois, difficile à comprendre rétroactivement.

Pour désigner ou décrire l'opération de changement de cadre on parle de «traduction», de «formulation différente», de «réinterprétation», ce qui présente pour le moins une connotation «langagière» que le terme plus général de «conversion» évite, puisque l'on peut convertir en visuel, en numérique, en schéma... Mais l'essentiel n'est pas là. Une opération du changement de cadre n'est ni regardée dans toute sa complexité intrinsèque ni envisagée comme étant constamment mobilisable, implicitement ou explicitement, au cours d'une même démarche de résolution. Et cela pour une raison simple : le changement de cadre, qui est d'abord défini en référence à «l'activité du mathématicien» lorsqu'il résout un problème, privilégie la fonction heuristique. Les problèmes proposés à des fins d'apprentissage doivent donc permettre d'effectuer un changement de cadre. Mais cela tend à le focaliser, ou à le localiser, sur une phase précise dans l'ensemble de la démarche de résolution : «Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être tout à fait équivalentes, permettent ... la mise en oeuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation» (Douady 1986, p.11). Autrement dit le changement de cadre consiste à traduire un problème dans un domaine de travail autre que celui que la première présentation du problème permet d'identifier. Car le problème en question doit pouvoir se formuler «dans au moins deux cadres différents» (Douady p.13). Ainsi, pour donner un autre exemple que celui proposé par R. Douady, le problème du partage d'une diagonale d'un parallélogramme en trois segments égaux peut être traité dans un cadre vectoriel ou dans un cadre de géométrie euclidienne (Laborde 2001 p.3-6). Et dans une perspective de cadre, on choisira le cadre dans lequel la résolution pourra s'avérer plus difficile en fonction des connaissances déjà acquises.

Décrire le changement en termes de conversion de représentation sémiotique, c'est au contraire insister sur la complexité de ce changement. En effet, un changement de cadre ne peut pas être réellement qualifié de «traduction», ou de «formulation différente», sans que l'on prenne en compte, non seulement la formulation à traduire et la nouvelle formulation, *mais également les systèmes ayant permis de produire respectivement l'une et l'autre.* On constate alors que les représentations sémiotiques mobilisées par le changement sont souvent hétérogènes : ainsi d'une figure à un énoncé, ou d'un énoncé en français à une formule algébrique, il peut y avoir un saut cognitif considérable. Ce qui veut dire qu'il y a plusieurs types de conversion, selon les types de registres mobilisés (*infra* Figure II). Parler de «traduction» ou de«formulation différente» c'est se limiter à la conversion entre deux langues «naturelles», c'est-à-dire en rester à l'homogénéité de deux registres d'un même type (discursif et multifonctionnel). Ou même à des transformations «réinterprétatives» lexicales à l'intérieur de la langue ! Par exemple, le passage d'un cadre géométrique à un cadre numérique consiste dans une «requalification» (au sens juridique du terme) pour «désigner» un nombre qui reste le même dans les formulations référentielles de départ et d'arrivée (même si la connotation de grandeur se trouve gommée) : «*demi-périmètre* 41cm» → «*somme a + b* = 41» (Douady 1986 p .21-22). Traduction ou reformulation ne sont qu'une forme particulière de conversion. A travers la diversification de ses formes, l'opération de conversion apparaît donc comme une opération qui est sous-jacente à tout acte de compréhension en mathématique. Et on la retrouve dans le travail à l'intérieur d'un domaine mathématique, même après que le changement de cadre, c'est-à-dire la reformulation du problème, ait été effectué.

C'est pourquoi les questions de la faisabilité d'une opération de changement, c'est-à-dire de la transparence et du degré de complexité de son exécution (*infra* Figure I : II.3, II4), n'ont pas la même importance dans les deux approches. Restant au second plan dans l'approche en termes de changement de cadre, puisqu'elles peuvent être laissées aux interventions de l'enseignant ou d'un élève plus expert, ces questions deviennent fondamentales dans celle en termes de changement de registre puisqu'elles doivent relever de l'initiative personnelle de chaque élève. Examinons ce point avec plus de précision.

1.2 Reconnaissance proactive ou retroactive du changement de «...»?

Techniquement, une analyse des opérations de changement, que ce soit en termes de «cadre» ou de «registre», ne peut se faire qu'en étudiant les «correspondances» entre ce qui était donné avant ces opérations et ce qui donné après. Or la place faite à ce type d'analyse varie beaucoup d'une approche à l'autre.

Dans une problématique de changement de cadre, les questions de la transparence et de la complexité d'une opération de refomulation ne peuvent pas être ignorées puisque, souvent, un changement de cadre s'accompagne d'un changement de registre. Ainsi on n'exclut pas le fait que les «correspondances entre les cadres soient imparfaites» (Douady 1986 p.22). Mais comme un changement de cadre a d'abord pour fonction de donner accès à un nouveau domaine de travail dans une résolution de problème, il est plutôt considéré comme ce dont il faut partir pour pouvoir introduire une nouvelle démarche mathématique. D'où le souci de choisir des problèmes dans lesquels le changement de cadre soit, pour les élèves, une opération spontanée ou, à défaut, si on doit le leur suggérer, une opération qui soit acceptable par tous (Douady 1986, p.7) :

> L'observation des procédures des élèves, du contenu cognitif de leurs échanges en situation de communication a attiré notre attention sur l'importance des changements de cadre **spontanés (i.e. à l'initiative de l'élève)** ou **provoqués** (**par l'intervention d'un autre élève** ou de l'enseignant) pour avancer dans la recherche d'un problème, pour débloquer une situation, pour évoluer les situations. Les changements de cadre étaient possibles par le choix des problèmes que nous avions fait

Autrement dit, si les élèves ne peuvent pas toujours reconnaître *proactivement* un changement de cadre, en revanche *retroactivement* la reconnaissance des correspondances entre après et avant ne soulèverait aucune difficulté. Cela implique également que l'on pourrait toujours trouver des conditions où le changement de cadre serait une opération simple pour les élèves, c'est-à-dire une opération d'un coût cognitif très faible. Et, à défaut, le changement de cadre étant une variable didactique entre les mains de l'enseignant, celui-ci lequel peut toujours aider sa réalisation ou le «donner» comme une idée. Cependant la question qui demeure en suspens est celle du transfert de ces situations où le changement de cadre est spontané ou «aidé» à celles où il ne l'est plus. Tout apprentissage se joue sur de tels transferts.

Lorsqu'on regarde une activité mathématique à partir des différentes représentations sémiotiques qu'elle mobilise ou utilise (des énoncés uniquement en langue naturelle, des formules littérales, des expressions algébriques, des graphiques, des figures et, *a fortioiri,* des représentations mixtes) l'opération de changement de registre s'avère être, au contraire, une opération qui, en raison de sa complexité cognitive, est presque toujours un point de «blocage» difficilement surmontable par les élèves. Cela peut surprendre, dans la mesure où un changement de registre coïncide, dans beaucoup de cas élémentaires, avec un changement de cadre. Mais l'ampleur de ce phénomène, quelque soit le niveau de l'enseignement obligatoire que l'on regarde, ne peut pas être ignorée. Il suffit, pour l'observer, de recourir à un dispositif de variation systématique de micro-tâches portant sur la reconnaissance des correspondances entre la représentation dans le registre de départ et celle, après conversion, dans le registre d'arrivée. Certes, avec de tels dispositifs, nous sommes loin de la résolution de problème! Mais toute résolution de problème implique nécessairement que beaucoup de ces micro-tâches soient triviales pour les élèves, c'est-à-dire que ceux-ci soient *capables de reconnaître proactivement et non pas seulement rétroactivement les correspondances entre avant et après.* Or les observations ainsi recueillies montrent chaque fois que non seulement il n'y a pas de reconnaissance proactive d'une conversion possible mais que très souvent **les élèves ne la reconnaissent pas ou ne la discriminent pas *rétroactivement*** : deux représentations d'un même objet sont pour eux deux représentations de deux objets totalement différents, et ils ne voient pas comment on a pu passer de l'une à l'autre. Ajoutons que l'ampleur de ce phénomène est d'autant plus importante que beaucoup de changement de registres ne résultent pas d'un changement de cadre mais se font à l'intérieur d'un même cadre mathématique. Comme on peut le voir, par exemple, en géométrie ou dans l'étude des fonctions linéaires ou affines.

Cependant le plus intéressant pour comprendre ce qui fait la spécificité de l'activité mathématique n'est pas là. On peut remarquer que la réussite dans la reconnaissance des correspondances —et donc dans la transparence de l'opération de conversion— tient à *des phénomènes de congruence et de non congruence qui sont d'ordre sémiotique et non pas d'ordre conceptuel.* En effet, le contenu d'une représentation produite dans un registre, c'est-à-dire les propriétés de l'objet que le registre rend accessible, dépend des possibilités d'explicitation que ce registre offre. Et, évidemment, l'intérêt d'une diversité de registres est de ne pas offrir les mêmes potentialités d'explicitation ou de présentation des propriétés d'un objet : *l'invariance référentielle liée à l'opération de conversion va donc de pair avec une modification du contenu qui, elle, va dépendre du système sémiotique mobilisé.* Car ce sont les propriétés explicitées qui constituent le contenu d'une représentation. Si, pour reprendre l'expression de R. Douady, les correspondances sont ou paraissent «imparfaites», ce n'est donc pas d'abord «pour des raisons mathématiques ou à cause des connaissances insuffisantes des élèves», c'est en raison même des systèmes sémiotiques utilisés, sans lesquels, d'ailleurs, la pensée ne pourrait pas fonctionner. Tout cela veut dire que pour un même objet mathématique, certaines conversions de représentations seront congruentes et d'autres non. *Cela dépendra à la fois des deux registres mobilisés et du sens de la conversion* ! En choisissant les problèmes de telle manière que le changement de cadre puisse se faire de manière «spontanée» ou puisse être reconnu rétroactivement par les élèves, R. Douady a choisi des situations dans lesquelles les conversions de représentation étaient très majoritairement congruentes. Mais, comme on peut facilement le deviner, les phénomènes de non-congruence ne peuvent pas être systématiquement évités et, surtout, la compréhension mathématique requiert qu'ils ne soient plus une cause de «blocage».

On voit là surgir un fissure, sinon une faille, dans le rapprochement tenté entre l'activité de l'élève et celle du mathématicien, c'est-à-dire entre la sitation d'un individu en formation et celle d'un professionnel ayant un longue et constante pratique : c'est la possibilité, ou non, de circuler à loisir entre des représentations sémiotiquement hétérogènes et de contenus différents bien qu'elles réfèrent au même objet. La conversion, en raison de sa complexité, est donc ce qu'il faut analyser pour remonter aux structures profondes dont le fonctionnement de la pensée en mathématiques dépend. Naturellement, si la question directice de la transparence des correspondances, et donc de la faisabilité (proactive) par les élèves, de l'opération de changement de «...» n'est pas considérée comme prioritaire, l'écart entre l'activité de l'élève et celle du mathématicien peut apparaître négligeable.

En résumé,.les deux approches partent du fait que ce sont les changements de direction de la pensée liés à des changements (respectivement conceptuels et sémitoques) de représentation des objets qui manifestent la dynamique propre à l'activité mathématique. Elles s'accordent également sur ce qui constitue l'apport des changements de cadre ou de registre. A une nuance près cependant, tenant à la fonction heuristique qui est mise en avant dans le changement de cadre : un changement de registre ne conduit pas à la création d'objets mathématiques nouveaux, même s'il permet de rendre accessible d'autres propriétés de l'objet que celles explicitées dans la représentation initiale. Sur ce point, la distinction entre contenu d'une représentation et objet représenté est une distinction décisive : la création d'un nouveau contenu de représentation n'implique pas la création d'un nouvel objet.

En revanche, les descriptions commencent à diverger sur ce qui constitue l'«invariant» d'ancrage du changement, c'est-à-dire sur ce par rapport à quoi un changement peut être identifié et décrit. Pour décrire un changement de cadre on se centre essentiellement sur un «problème» tandis que pour décrire un changement de registre on se centre essentiellement sur les objets représentés. Nous sommes donc là en présence de deux problématiques différentes : l'une de *résolution (mathématique) de problème* et l'autre d'*accessibilité cognitive des objets mathématiques.* Rappelons d'ailleurs que le terme «objet» ne désigne pas tout à fait la même chose dans les deux approches. Nous gardons au terme «objet» son sens à la fois phénoménologique et sémiotique : d'une part point focal d'un acte d'attention permettant de discriminer ou de distinguer une chose d'une autre et, d'autre part, ce à quoi renvoie l'emploi d'un signe ou d'une représentation ou encore l'invariant référentiel d'expressions ou de représentations considérées comme équivalentes. Ce que R. Douady appelle «objet» est plutôt un complexe théorique ou culturel de plusieurs objets, bref un réseau de concepts prenant place dans un «édifice plus large»(1986, p.9). C'est la raison pour laquelle d'ailleurs il y a des changements de registres sans qu'il y ait changement de cadre mathématique

Ce ne sont donc pas les mêmes questions que l'on est conduit à privilégier et à travailler dans une problématique de changement de cadre et dans une problématique de changement de registres. Et cela conduit à formuler différemment les conditions d'apprentissage des mathématiques.

2 Quelles sont les conditions d'un développement de l'activité mathématique chez les élèves ?

L'intérêt d'une analyse de l'activité mathématique est, bien évidemment, de dégager les conditions de son développement ou, plus spécifiquement, les conditions de son appropriation par les élèves. Avec cette préoccupation, nous retrouvons donc la question de la dualité des points de vue, évoquée dans l'introduction : d'une part, il y a les exigences propres à une démarche mathématique (ses «outils», ses conditions de validité) et, d'autre part, il y a les exigences propres au fonctionnement cognitif par lequel des sujets peuvent mener une démarche mathématique, c'est-à-dire d'en avoir l'initiative et le contrôle. Cette dualité a souvent été perçue comme une alternative voire même érigée en dilemme. Et cela au prix d'une impasse sur le problème cognitif fondamental que pose l'apprentissage des mathématiques : l'activité mathématique ne requiert elle *que le fonctionnement cognitif commun* qui est mobilisé dans les autres domaines de connaissance ou, au contraire, requiert-elle le développement d'un *fonctionnement cognitif impliquant des structures spécifiques et plus complexes* ? Ce problème cognitif peut-être formulé autrement —on n'échappe pas ici à la logique du changement de cadre !— : accède-t-on aux objets mathématiques de la même manière que l'on accède aux autres objets de connaissances dans les autres sciences ? Alors que l'option générale en didactique s'en tient à première hypothèse, probablement sous l'effet de l'héritage du modèle piagetien de développement, l'analyse des conditions nécessaire au développement de l'activité mathématique conduit, au contraire, à reconnaître la nécessité du choix de la seconde.

2.1 De quoi dépend l'activité mathématique :d'«outils» ou des systèmes de fonctionnement cognitif du sujet ?

L'activité mathématique ne se réduit pas à des changements de cadre. Devant permettre de mettre en oeuvre des «outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation» d'un problème (1986, p. 11), il concerne surtout la phase initiale de la résolution d'un problème. Aussi, pour analyser l'activité mathématique qui suit un changement de cadre, R. Douady recourt à la «dialectique outil-objet» . Arrêtons nous un instant sur la métaphore instrumentale qui commande l'emploi du mot «outil» pour décrire le fonctionnement de l'activité mathématique à l'intérieur d'un cadre :

> nous disons qu'*un concept est outil* lorsque nous focalisons notre intérêt sur **l'usage qui en est fait pour** résoudre un problème. Un élève, en activité mathématique, peut recourir à un outil de manière implicite ou explicite (R. Douady, 1986, p.9).

Ainsi dans cette perspective les théorèmes deviennent des «outils», ce mot tendant même à supplanter le terme «théorème» lorsque l'enseignement introduit l'exigence de démonstration. Or le recours à un tel concept-métaphore entraîne trois conséquences qui jouent sur la description que l'on peut faire des conditions de développement de l'activité mathématique chez les élèves.

(1) Cela conduit à proposer un modèle de fonctionnement unique de l'activité mathématique, quel que soit le cadre choisi. Autrement dit, si les cadres se distinguent par

les concepts propres aux différentes domaines des mathématiques, en revanche le fonctionnement de l'activité doit présenter des aspects fondamentaux communs d'un cadre mathématique à l'autre, et le seul intérêt d'un cadre par rapport à un autre cadre est dans les moyens de résolution qu'il offre, ou qu'il n'offre pas pour un problème.

(2) Cela réintroduit la séparation entre, d'un côté, les concepts et, de l'autre côté, les représentations sémiotiques alors que la description d'un changement de cadre tendait à rejeter une telle séparation ! En effet, alors que les formulations interviennent comme l'une des composantes essentielles pour l'analyse d'un changement de cadre, puisque ce sont elles qui situent un problème dans tel ou tel autre cadre mathématique, elles semblent en quelque sorte devenir complètement extérieures ou étrangères aux concepts dans la présentation qui est faite de la dialectique outil-objet (Figure I *supra*, III).Autrement dit, s'il ne peut pas y avoir de problème sans formulation, en revanche il pourrait y avoir des concepts sans représentations sémiotiques (que celle-ci soient ,ou non, intériorisées).

(3) Cela tend à exclure le sujet des conditions du déroulement d'une activité. Et cela à la fois sous l'angle du rapport de maîtrise du sujet à l'outil particulier qui est utilisé, et sous celui des systèmes internes de fonctionnement du sujet qui sont mobilisés pour qu'il puisse utiliser efficacement l'outil. En mettant en avant cette notion d'outil on repousse au second plan l'utilisation de l'outil qui peut être faite par les élèves. Ou, plutôt, on est conduit à supposer qu'ils découvriront plus ou moins spontanément comment s'en servir d'une manière mathématiquement acceptable. Or quelle peut être la portée d'une telle supposition lorsqu'on l'applique à l'ensemble des élèves d'un système éducatif ? Et la proportion des élèves pour lesquels cette supposition ne peut pas être vérifiée, ne tend elle pas à croître de manière importante au fur et à mesure que l'on avance dans le curriculum ?

Dans une problématique de registre de représentation, on distingue l'activité de conversion et celle de traitement. Ce qui veut dire qu'une résolution de problèmes peut faire alterner des traitements et des conversions. Par «traitement» nous entendons la transformation d'une représentation d'un registre donné en un autre représentation du même registre. Il s'agit donc là d'une opération qui est doublement restreinte par rapport à la notion d'utilisation d'un outil. Cette opération est localement restreinte puisqu'un traitement s'identifie, par exemple, au niveau de chaque pas dans la résolution d'un problème. Et cette opération est souvent mentalement ambivalente ou en suspens, puisque *le moyen permettant la transformation locale (au niveau d'un pas de résolution) n'est pas seulement envisagé par rapport à une propriété mathématique mais aussi par rapport au système de fonctionnement cognitif que le registre mobilisé permet d'effectuer.* Cela veut dire que chaque registre offre des possibilités de traitement qui lui sont propres, par exemple d'ordre discursif ou d'ordre visuel. Mais cette distinction est encore trop globale. Ainsi parmi les registres permettant des traitements discursifs certains permettent des traitements par association et par expansion (les langues naturelles) d'autres seulement par substitution (les écritures symboliques, les langues formelles (Duval 1995 p. 125-132, 238-250). De même la variété des traitements visuels possibles ne relèvent pas d'un seul et même registre (Duval 2001). D'où la nécessité d'un classement des registres permettant d'analyser la diversité des modes de fonctionnement cognitifs possibles. La classification, très simple, proposée ci-dessous n'a évidement qu'une valeur illustrative du lien étroit qu'il y a entre un «traitement» et le type de registre de représentation sémiotique dans lequel il est effectué.

	DISCURSIF	NON DISCURSIF
REGISTRES MULTIFONCTIONNEL : les traitements ne sont pas algorithmisables	langue naturelle *associations verbales (conceptuelles)* *raisonnement :* *— argumentation à partir d'observations, de croyances..* *— déduction valide à partir de théorèmes (substitution)*	figures géométriques planes ou en perspective (des configurations de formes en 0, 1, 2, 3 D) *appréhension opératoire et pas seulement perceptive* *constructibilité avec des instruments, un changement d'instrument pouvant entraîner des changements de contraintes*
REGISTRES MONOFONCTIONNELS : les traitements sont principalement des algorithmes	systèmes d'écriture : — numériques (binaire, décimale..) — littérale, algébrique, symbolique (langue formelle) *calcul*	graphes cartésiens *changement de système de coordonnées,* *interpolation, extrapolation*

Figure 2. Classification des différents types de registre de représentation sémiotique

Nous avons mis, en caractères droits, un exemple de registre, et en italiques des traitements spécifiques à ce type de registre. Notons que ce que les figures géométriques, en termes de registre, se limitent aux «formes» visuellement identifiables en 1, 2, ou 3D et ne comprennent **aucune indication de mesure ou de propriété : de telles indications** relèvent d'autres registres. On voit ici pourquoi un cadre géométrique mobilise simultanément au moins deux, sinon trois, registres de représentation. Ce qui est généralement considéré comme une figure géométrique est en général une représentation mixte, dans laquelle on associe des unités représentationnelles de registres différents.

Une analyse des traitements mathématiques qui prend en compte le registre dans lequel ils sont effectués, et non plus seulement l'utilisation instrumentale d'un concept, conduit aux trois déplacements suivants :

(1') La diversité des fonctionnements cognitifs que l'activité mathématique peut mobiliser ou mettre en oeuvre, selon les situations, est explicitement prise en compte. Car on ne «comprend pas» , on «raisonne» pas, on ne «réfléchit» pas, on ne «cherche» pas, on ne «travaille» pas... de la même manière avec des figures, avec des schémas, avec des mots, avec des énoncés ou avec des formules, etc... Et même si certains registres sont communs à tous les individus d'une même société ou d'une même culture, comme la langue, en revanche les traitements faits dans ces registres communs utilisent d'autres possibilités que celles qui sont habituellement mises en oeuvre dans la pratique commune de la communication. Cela apparaît aussi bien dans les démarches de raisonnement en langue naturelle que dans la manière de regarder des figures ou de lire des tableaux.

(2') Toute coupure entre concept et représentation sémiotique est rejetée. De même qu'il n'y a pas de «problème» sans «formulation», de même il n'y a pas de concept sans représentation sémiotique. *Naturellement, on peut changer le registre de représentation* *d'un concept, mais on ne peut jamais séparer le concept d'une représentation sémiotique.* C'est d'ailleurs la raison pour laquelle, en suivant la distinction sémantique de Frege, nous préférons parler d'objet mathématique plutôt que de «concept» et prendre comme primitive le couple {signe, objet}[1] (Duval 1998). Et il serait erroné de croire que l'objet et la représentation sémiotique y resteraient, malgré tout, séparés comme les deux faces d'une pièce de monnaie. Imaginons en effet que nous voyions le côté «signe de..» (ou «représentation de..») et retournons la pièce, qu'allons nous trouver ? Non pas l'objet lui-même, mais une autre représentation sémiotique de cet objet, le plus souvent dans un autre registre ! Notre pièce était faite de deux représentations sémiotiques qui n'avaient pas le même contenu. En réalité cette petite expérience mentale ne marche pas toujours. En effet, elle ne marche pas pour les objets auxquels je puis avoir soit un accès perceptif (et dont je puis donc avoir une« image mentale») indépendamment de toute médiation sémiotique, — que cet accès soit direct comme pour tous les objets physiques de notre environnement ou indirect en recourant à des dispositifs instrumentaux comme pour tous les objets situés en deçà ou au delà de nos seuils de discrimination perceptive—. Mais les objets mathématiques ne relèvent d'aucune de ces deux catégories d'objets accessibles en dehors d'une médiation sémiotique. Et nous retrouvons ici la question soulevé en début de cette deuxième partie : accède-t-on aux objets mathématiques de la même manière que l'on accède aux autres objets de connaissances dans les autres sciences ?

(3') Les registres de représentation sémiotiques ne doivent pas être seulement considérés comme des «outils», c'est-à-dire comme des instruments disponibles, des méthodes ou des procédures, entre lesquels le sujet pourrait choisir, mais comme *des systèmes qui, au contraire, développent la capacité de représentation mentale du sujet.* Ils sont inhérents au fonctionnement de la pensée. Naturellement, à la différence des systèmes permettant, dès la naissance, d'accomplir les fonctions cognitives vitales de réception, de conservation et de réactivation des informations du milieu environnant, les sujets doivent progressivement s'approprier les systèmes de représentation sémiotique. L'activité mathématique, du moins

---

[1] Il ne faut pas confondre la relation s**igne-objet** avec la distinction **signifiant-signifié** par laquelle on définit les signes : le signe n'est en rien un signifiant et le signifié n'est pas l'objet. Si les signes existent indépendamment des objets, en revanche il n'y pas de signifiant sans signifié. Prenons l'exemple des mots d'une langue (substantifs, adjectifs ou verbes). Les mots ont plusieurs signifiés mais ces signifiés ne renvoient pas à des objets, sinon ils ne seraient que des noms propres. Pour que les mots réfèrent à un objet il faut des opérations discursives de détermination et de complémentation combinant plusieur mots : ce sont les syntagmes qui permettent de désigner des objets (Russell parlait de «description définies»). Beaucoup de notations mathématiques sont des signes «dégénérés» : ce sont des signes sans signifié, sans contenu, qui n'existent qu'en tant qu'ils désignent un objet, c'est-à-dire une opération ou une relation mathémaique. En d'autres termes, les notations mathématiques fonctionnent comme des noms propres ! Pour résumer, la relation entre signe et objet est *une relation de référenc*e, tandis que la relation entre signifiant et signifié est *une relation d'association-fusion intransitive*; et cette relation signifiant-signifié ne doit évidemment pas être confondus avec les *relations d'association verbale qui, elles, sont transitives* et forment des «réseaux sémantiques». Souvent, ces trois types de relation, radicalement différents, sont confondus, ce qui hypothèque beaucoup d"explications théoriques ou de modélisations de l'activité cognitive.

Dans son ouvrage fondateur, Saussure ne disait pas autre chose : « le signe linguistique unit non une chose et un nom mais un concept et une image acoustique» (p. 98) et il précisait : «nous nous proposons de conserver **le mot signe pour désigner le total** et de remplacer *concept* et *image acoustique* respectivement par *signifié* et *signifian*t» (p.99). Or chacun de ces deux aspects indissociables d'un signe ne **peut être identifié que dans ses rapports de contraste ou d'opposition avec l'aspect correspondant d'autres signes** (p.159). **C'est pour cela qu'il n'y a de signe que dans un système de signes.** Et Frege, pour expliquer les mécanismes de progression discursive du calcul et du raisonnement, s'était appuyé sur les variations de signifié ou de contenu d'expressions différentes (donc de signes ou de combinaisons de signes différents) qui conservent la référence au même objet (Duval 1998). Pour Frege, l'objet c'est l'invariant référentiel. Mais cette détermination prend une importance particulière lorsque les objets, comme en mathématiques, ne sont pas accessibles indépendamment de représentations sémiotiques !

celle qui est sollicitée des élèves tout au long de la scolarité obligatoire, requiert l'appropriation et la coordination de ces systèmes sémiotiques qui accroissent le champ du fonctionnement cognitif et celui des représentations (Séminaire IUFM 1999, p.40-48) Et c'est peut-être là le point aveugle de beaucoup de modèles cognitifs ou épistémologiques utilisés pour analyser les problèmes d'apprentissage des mathématiques : ils les réduisent à des outils extérieurs.

2.2 L'enjeu des apprentissages mathématiques en formation initiale : construction de savoirs ou développement de l «architecture cognitive » du sujet ?

Il est essentiel de ne jamais confondre la conscience du sujet et les systèmes de fonctionnement cognitif qui lui permettent de discriminer des objets, de les reconnaître sous des présentations différentes, de choisir des outils, de contrôler des résultats. Toute activité consciente repose sur la coordination de plusieurs systèmes hétérogènes de représentation dont les fonctionnements ne sont pas conscients. *C'est sur la prise en compte de cet envers infraconscient de la conscience que repose l'approche cognitive des problèmes de développement et d'apprentissage.* Rappeler cela peut sembler trivial. Et pourtant les conséquences didactiques en restent profondément méconnues. *Car cela veut dire que la conscience est le lieu d'émergence des représentations mais non pas leur principal, et encore moins leur unique système de production* : dans ces conditions, peut-on faire comme si c'était le sujet (donc l'élève) qui produisait ou modifiait consciemment les représentations formant le contenu de ses pensées, de ses conceptions ou de ses croyances ? Le présupposer, implicitement ou explicitement, relève de ce que l'on pourrait appeler *l'illusion unitaire du sujet.* Une telle illusion, caractéristique d'une épistémologie cartésienne, revient à identifier le sujet à sa conscience actuelle et à faire de celle-ci le principal système de production des représentations et non pas seulement leur lieu d'émergence. Le rôle reconnu aux registres de représentation sémiotique change selon que l'on s'en tient une conception unitaire du sujet ou que l'on prend en compte l'envers infraconscient et complexe de toute activité consciente. De quel côté situer les registres de représentation sémiotique ?

Les considérer comme des «outils» c'est les situer uniquement du côté conscient, c'est en faire des objets disponibles et manipulables que le sujet ferait fonctionner de manière délibérée, c'est-à-dire en pouvant en commander non seulement le choix mais l'émergence consciente qui les précède ainsi que la dynamique productive et pas seulement son contrôle rétroactif. Car, évidemment, tout ce qui est utilisable comme outil est d'une certaine manière extérieur au fonctionnement cognitif de la pensée. Comme, par exemple, comme pour les instruments d'écriture et de dessin qu'il a dans sa trousse ! Si l'on s'inscrit dans une telle perspective, il faut cependant admettre qu'il n'y a pas *un* «outil sémiotique» (l'écriture littérale ou symbolique de l'algèbre par exemple) mais *autant* d'outils sémiotiques *que de* systèmes de représentation. En outre, les outils sémiotiques restent irréductibles à ces autres outils que seraient les concepts et les théorèmes.

Au contraire, les considérer comme des conditions nécessaires pour un certaine forme d'activité consciente, en l'occurrence l'activité mathématique, c'est les situer du côté infraconscient, c'est en faire les systèmes de production de ce qui survient à la conscience. Ici la relation de la conscience à ces systèmes n'est plus une relation de commande, mais une relation d'«incorporation» pour reprendre la formule de Merleau-Ponty (1945 p.161). En ce sens il n'y a pas plus d'usage instrumental, ou consciemment commandé des systèmes sémiotiques qu'il n'y a un usage instrumental de notre corps, c'est-à-dire de la voix pour parler, des yeux pour regarder ou explorer ou même de la main pour accomplir l'action qui vient à l'esprit ! Le rapport du sujet à sa main n'est pas de même nature que le rapport du sujet à l'outil qu'il dirige de sa main. Et si, localement, certains parmi les quatre types de registre, peuvent être utilisés comme des «outils», c'est toujours sur la base soit de leur incorporation préalable, soit en référence à un autre registre qui lui est déjà plus ou moins incorporé. C'est seulement en fonction de leur degré d'incorporation préalable et globale que les systèmes sémiotiques peuvent avoir aussi un usage instrumental. Dans cette perspective, le fonctionnement cognitif de la pensée est indissociable de son degré de structuration : l*a conscience du sujet ne peut pas construire au delà de ce que lui permet l'architecture cognitive sous-jacente, laquelle détermine les capacités de reconnaissance immédiate ainsi que les traitements dont elle peut avoir l'initiative ou le contrôle.* Et cela apparaît de manière plus manifeste et plus décisive pour l'activité mathématique que pour la plupart des autres formes d'activité cognitive. L'enjeu des apprentissages mathématiques en formation initiale c'est, en définitive, celui de l'incorporation de ces systèmes sémiotiques de représentation à l'architecture cognitive initiale des sujets : dans cette perspective, *les acquisitions décisives ne sont pas des acquisitions conceptuelles mais des acquisitions fonctionnelles.*

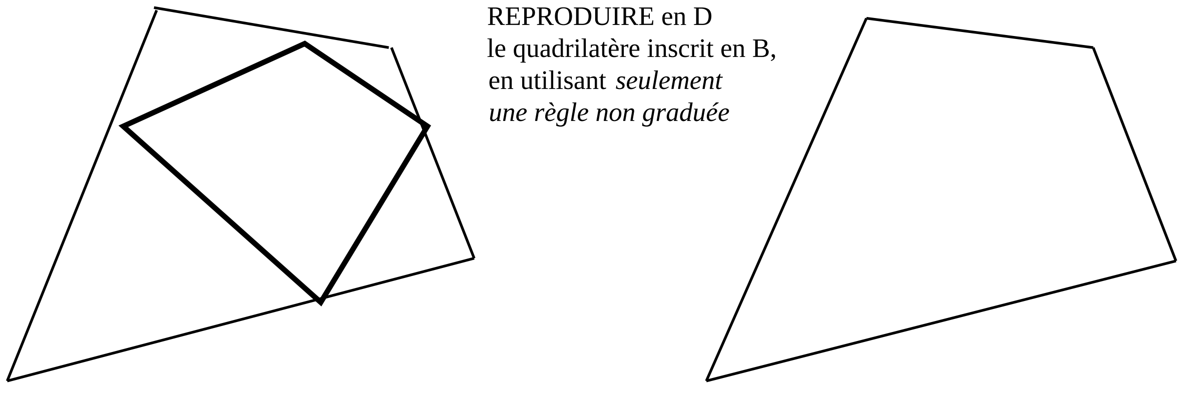
Ces quelques remarques peuvent paraître très éloignées des analyses didactiques. Elles ont pourtant une conséquence pratique : dans l'analyse de la production des élèves, on ne peut pas s'en tenir seulement aux procédures.

Voici, à titre d'exemple, une tâche de construction proposée en fin d'enseignement primaire et dont l'objectif est de faire prendre conscience aux élèves ce passage de deux à une dimension (Perrin 2000) nécessaire pour accéder à la compréhension de certaines propriétés géométriques.

Figure B : un quadrilatère inscrit dans un autre quadrilatère

Figure D : un quadrilatère

REPRODUIRE en D le quadrilatère inscrit en B, en utilisant *seulement une règle non graduée*



Le problème de la reproduction tient à la contrainte consistant dans l'interdiction de l'utilisation d'une règle non graduée. Cela impose certaines procédures correspondant à la mise en oeuvre de propriétés affines. En effet, il faut effectuer le détour par la construction d'un réseau de douze droites supports pour déterminer la position des sommets du quadrilatère à reproduire. Cette construction du réseau de droites implique deux procédures différentes qui sont des actions très simples à exécuter, même si elles demandent une certaine précision dans le geste technique nécessaire pour tracer une droite (*infra* Figure 3). Mais la mise en oeuvre de chacune de ces deux actions présuppose des opérations cognitives qui vont mettre l'individu en situation d'initialiser ces actions. La première opération semble particulièrement difficile dans la mesure où la réorganisation visuelle doit se faire *contre la loi gestaltiste* de clôture. Il y a une résistance perceptive à briser le contour fermé d'une forme 2D pour en prolonger les côtés. La seconde est, peut-être, plus naturelle dans le contexte de la première. Cependant il faut une troisième opération qui va permettre de choisir les deux procédures à initialiser : reconnaître les deux quadrilatères de la figure de départ dans le réseau des droites supports que l'on obtiendra si on prolonge les côtés. En effet, l'enchevêtrement des triangles et des quadrilatères possibles que le loi gestaltiste de clôture permet d'y détacher, et donc de «voir», tend autant à dissimuler les deux quadrilatères qu'à les montrer. Or une telle reconnaissance peut intervenir avant (on est alors en présence d'un sujet autonome pour la résolution) ou seulement après, comme justification intuitive du détour par le réseau de droites support. De toutes manières la résolution de ce problème entraîne un travail dans le registre des figures et elle exige que le sujet soit capable de surmonter, sans un coût temporel, ou autre, trop considérable, les deux résistances visuelles suivantes :

— générer un réseau ouvert de droites supports à partir d'une figure close,

— reconnaître dans un réseau de droites les figures cibles qui sont données dans l'énoncé de la tâche mais qui ne sont pas spontanément reconnaissables dans le réseau

Or ces deux résistances visuelles touchent un changement de dimension dans l'identification perceptive des unités figurales d'une configuration. Et en outre elles sont en quelques sortes opposées

I. PROCÉDURES :	II OPÉRATIONS COGNITIVES d'organisation visuelle
(1) Prolonger les côtés pour faire apparaître les droites supports, (2) Joindre les points d'intersection créés par prolongement pour faire apparaître d'autres droites.	(1') Réorganiser l'unité figurale 2D : voir le quadrilatère circonscrit comme une configuration d'unités figurales 1D, (2') Regrouper des unités figurales 0D en des unités figurales 1D. (0) Reconnaître parmi beaucoup d' unités figurales 2D potentielles possible les deux quadrilatères correspondant à ceux de l'énoncé

Figure 3 L'analyse d'une tâche mathématique, faite dans une perspective d'apprentissage, doit distinguer les procédures mathématiques acceptables et les opérations cognitives qui permettent au sujet d'«y penser» et d'en contrôler la mise en oeuvre

On voit alors le problème de l'apprentissage des mathématiques en formation initiale. On peut le formuler dans la question suivante : suffit-il de mettre les élèves dans des situations où ils seront conduit à mettre en oeuvre une procédure, seul où avec l'aide de quelqu'un d'autre, pour que d'une part ils s'approprient le systèmes de fonctionnement propre aux différents registres mobilisés (et dont, ici, dépendent les opérations cognitives d'organisation visuelle) et que d'autre part ils le coordonnent avec un registre permettant d'énoncer des propriétés ? En d'autres termes, les variables didactiques doivent-elles être déterminées seulement en fonction des procédures ou ne doit-on pas aussi prendre en compte les opérations cognitives ?

Il ne s'agit là que d'un exemple pour montrer la nécessité d'une double analyse de l'activité mathématique. Nous avons pris cet exemple en raison des difficultés ultérieures qui apparaissent aussi bien dans l'utilisation heuristique des figures que dans la sensibilité à la force démonstrative de certaines organisations d'énoncés. Mais la nécessité de cette double analyse est peut-être encore plus spectaculaire lorsqu'il s'agit d'introduire l'algèbre dans l'enseignement au Collège : que l'on recourt à des lettres ou à des mots de la langue parlée, on ne peut ignorer la complexité des opérations discursives de la désignation et de la description d'objets sous peine de rendre très obscure l'introduction des lettres, des inconnues et des variables (Duval 2001).

3 «Problème» et situation d'apprentissage : comment en analyser et en contrôler les rapports ?

Le travail que Régine Douady a développé se situe évidemment à ce point hypothétique où l'activité de l'élève pourrait s'approcher de celle du mathématicien, point que l'on désigne par le terme très, ou trop, générique de «problème» : « nos hypothèses amènent à *découper* les notions mathématiques, objet de l'apprentissage, *selon un enchaînement de* ***problèmes*** qui, par leur organisation et **grâce à leur résolution** dans une *responsabilité partagée* entre l'enseignant et les élèves doivent... (1986 p. 8)[1]. Mais il y a une distance considérables entre les problèmes «auxquelles dans leurs recherches, les mathématiciens sont confrontés...» et les problèmes que l'on peut proposer aux élèves du Primaire ou du Collège à des fins d'apprentissage. Indépendamment de la différence de position entre un élève et un mathématicien par rapport à un problème mathématique à résoudre (temps pouvant être consacré à la recherche, compétences en mathématiques, intérêt personnel, capacité d'investissement différentes entre un enfant et un adulte...) on serait presque tenté de dire que cette modification de fonctionnalité change la nature des «problèmes» : car il s'agit alors de faire mettre en oeuvre, à travers la résolution d'un problème, la notion mathématique à apprendre. Ce qui revient, en quelque sorte à adapter les problèmes aux exigences d'une situation d'apprentissage. Autrement dit, les problèmes retenus doivent remplir certaines conditions» (1986, p.7,9). Oui, mais cela soulève plusieurs problèmes didactiques majeurs et qui sont encore loin d'être évidents aujourd'hui, concernant d'abord le choix des «problèmes» et, ensuite, la valeur des interprétations que l'on peut faire des productions d'élèves obtenues au cours de la résolution. Comment détermine-t-on ces conditions ? Certaines sont-elles communes aux différentes notions mathématiques «découpées» en vue de leur apprentissage ? Comment peut-on montrer que les problèmes remplissant le cahier des charges ainsi fixé permettent effectivement un réel apprentissage pour les élèves ? D'un point de vue méthodologique ces questions nous renvoient à la question suivante : *comment analyser un problème en vue d'expliciter les conditions ou les moyens d'apprentissage qu'il offre aux élèves ?* Les analyses de l'activité mathématique en termes de changement de cadre et en termes de changement de registres nous conduisent à deux méthodes totalement différentes d'analyse : l'analyse en aval et l'analyse en amont.

[1] Le surlignement par les italiques est le fait de R. Douady et j'ai ajouté un surlignement en caractère gras.

3.1 L'analyse en aval

En mathématiques, un problème implique toujours un énoncé, même si l'on prend soin de bien distinguer l'énoncé du problème et le problème posé. En effet, c'est l'énoncé qui d'une part fixe les hypothèses de départ et les contraintes éventuelles à respecter et qui d'autre part détermine l'objectif à atteindre, sous la forme d'une question ou d'une simple injonction. Toute analyse d'un problème part donc d'une formulation du problème.

La méthode habituellement mise en oeuvre consiste à rechercher et à examiner les différentes solutions possibles en vue de choisir les conditions, ou la situation, dans lesquelles ce problème pourra être proposé en classe : introduire une notion nouvelle, faire utiliser ce qui a déjà été enseigné dans des situations différentes de celles déjà présentées aux élèves... Et l'examen des différentes solutions possibles se fait en fonction des différentes «notions» (propriétés) ou des différentes procédures que chacune met en oeuvre. Nous appellerons «analyse en aval» cette méthode d'analyse puisqu'elle va de l'énoncé du problème à la résolution du problème.

L'approche en termes de changement de cadre s'inscrit dans cette méthode d'analyse en aval, mais en attirant l'attention sur le fait que la formulation de l'énoncé est une composante essentielle du problème, dans la mesure où elle se fait en référence aux concepts d'un cadre mathématique. Un changement de cadre conduit donc à une reformulation de l'énoncé du problème.

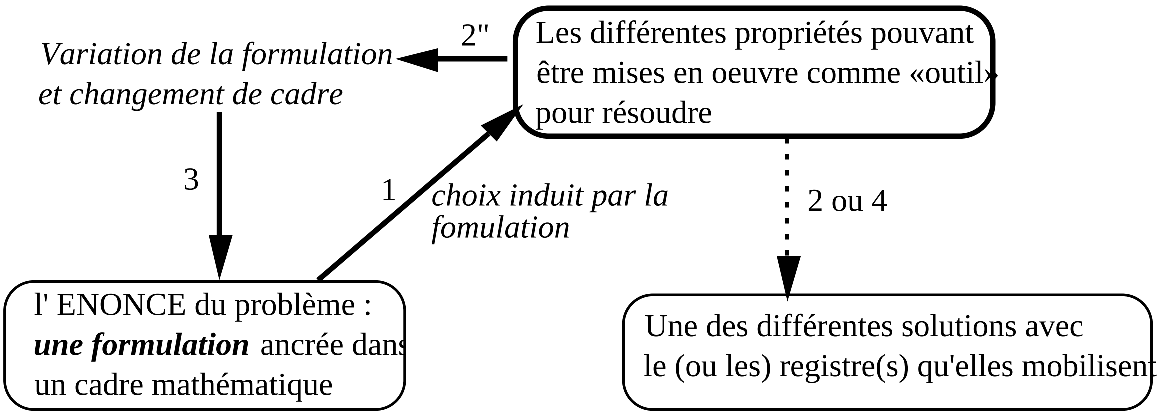


Figure 4 Méthode d'analyse en aval

Cette méthode d'analyse en aval est évidemment celle de l'analyse mathématique d'un problème. En introduisant la boucle (1, 2",3) dans la méthode d'analyse, l'approche en termes de changement de cadre conduit donc à expliciter des variations que l'enseignant peut contrôler et mettre en oeuvre dans le déroulement du travail des élèves. En effet, une formulation particulière étant choisie et proposée aux élèves, un (ou plusieurs) parcours de la boucle peuvent être introduit dans le travail de recherche et de résolution. Et c'est ce type de variations qui permet de rapprocher le travail des élèves en classe de celui du mathématicien.

3. 2 Analyse en amont

L'analyse cognitive d'un problème de mathématique suit une autre direction. On ne s'intéresse pas à ses différentes solutions possibles mais à la solution qui peut être privilégiée par le choix d'un énoncé ou qui est attendue suite au choix de cet énoncé. Car il ne s'agit pas ici d'analyser l'énoncé du point de vue des connaissances mathématiques qu'il peut mobiliser mais du point de vue la tâche cognitive que représente *le passage de l'énoncé à l'initialisation, par le sujet qui doit le résoudre, des premiers pas de la solution* privilégiée, ou prédéterminée, par la formulation de l'énoncé.

On part donc du couple {un énoncé de problème, une solution} et cela permet de déterminer ce que nous appellerons la «distance cognitive» entre la formulation de l'énoncé et les premiers pas de la solution. Cette distance dépend des types de registres (*supra* Figure 2) mobilisés par cette formulation du problème et de ceux mobilisés par les premiers pas de la solution sont effectués : le passage de l'énoncé au premiers pas de la solution peut exiger ou non une conversion dont la complexité va varier selon le type de registre de départ et le type de registre d'arrivée et, au cas où une conversion est nécessaire, celle-ci peut être congruente ou. La distance cognitive peut donc varier de façon importante. En outre, on peut prendre en compte le fait que le registre mobilisé dans les premiers pas donne lieu ou non à des traitements algorithmisés.

On peut alors envisager toutes les variations de l'énoncé qui, sans modifier la solution que l'on veut faire privilégier, vont réduire ou augmenter cette distance cognitive. Cela permet de générer un **champ d'énoncés** et de l'ordonner selon en fonction des facteurs qui déterminent leur plus ou moins grande complexité de compréhension.

1. Variations «rédactionnelles» **2. Distance cognitive**

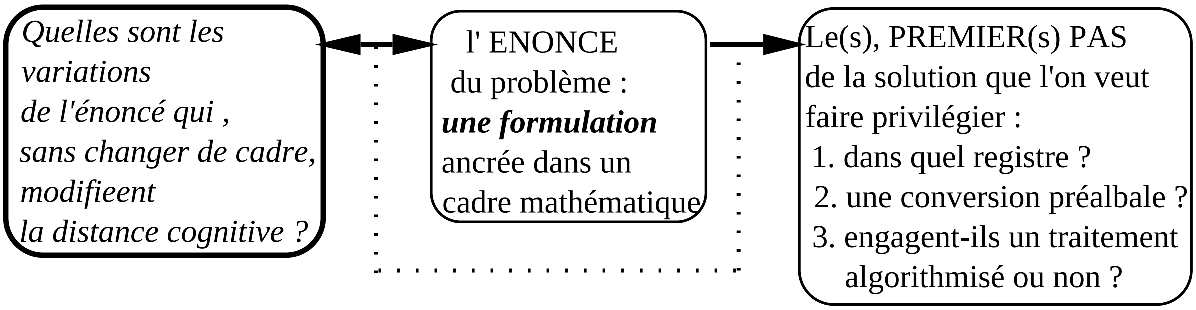


Figure 5 Méthode d'analyse en amont

Avec cette méthode, que nous appellerons «en amont», l'analyse joue sur la corrélation (le trait en pointillé sur le schéma) entre une variable dépendante, la distance cognitive, et des variables indépendantes, qui sont les facteurs de variation de la formulation de l'énoncé. Naturellement, cela ouvre deux questions à la recherche

— (1) l'identification des facteurs susceptible de modifier la distance cognitive,

— (2) la vérification de la pertinence et du «poids» de chacun de ces facteurs chez les élèves, individuellement , en binômes ou sur des populations plus larges qu'une classe y compris en tenant compte des différents niveaux des élèves.

Le premier exemple d'une méthode d'analyse en amont, proche de celle que nous décrivons nous semble être le travail de G. Vergnaud sur les problèmes additifs (1976). En ayant explicitement pris en compte deux facteurs (la variation état/transformation, et la place de l'information manquante dans l'ordre de description de la situation non mathématique),il a généré systématiquement un ensemble d'énoncés résolubles par une seule opération d'addition ou de soustraction et il a montré des écarts de réussite entre certains pouvant aller au delà de deux années scolaires. L'analyse de la corrélation entre les variations d'énoncés et les résultats enregistrés montre d'ailleurs l'importance d'un troisième facteur jouant sur la congruence ou la non congruence entre la formulation des termes porteurs de l'information numérique dans l'énoncé et l'opération arithmétique à mobiliser pour résoudre : la non congruence est la plus forte quand par exemple les verbes porteurs de l'information numérique dans l'énoncé sont des antonymes.

Naturellement une analyse de l'énoncé en termes de registre permet une identification rapide des facteurs susceptibles de modifier sur la distance cognitive. Dans les énoncés de problème de géométrie, il faut également prendre en compte le caractère mixtes des représentations. Il y a à la fois la figure de départ, celle qui est donnée dans l'énoncé ou qui peut être construite à partir de l'énoncé, et il y a la dénomination des objets géométriques (dénomination qui renvoie à unités figurales 0, 1, 2 ou 3D). Il peut donc y avoir ici deux facteurs différents de non congruence : la figure de départ permet de voir, «visuellement» ou non, les modifications conduisant à la solution, et la manière dont les objets sont nommés dans l'énoncé oblige ou non à une requalification des objets nommés pour passer de le considération d'unités figurales 2D à des unités figurales 1D, par exemple.

3. 3 Laquelle des deux méthodes ?

Question évidemment rhétorique dans un exposé puisque la réponse semble évidente, bien qu'elle le soit moins dans les discussions, où l'on tend à les opposer comme mathématique/ non mathématique. Inutile de poursuivre ici un débat sans fin. Cependant, dans la mesure où les deux analyses sont conduites dans un perspective d'enseignement et d'apprentissage, on peut faire les remarques suivantes.

L'analyse en aval requiert une *culture mathématique* : elle renvoie à une base de connaissances mathématiques qui doit nécessairement dépasser le contexte particulier, ou étroit, de la formulation d'un énoncé, quel qu'il soit. Et le recours au changement de cadre présente, par rapport à cela, l'avantage et l'intérêt de faire établir une «circulation» entre des domaines, ou plus modestement, entre des zones de connaissances mathématiques, qui avant pouvaient être considérés comme séparés. En ce sens, ce travail d'analyse apparaît autant comme un travail de «synthèse» car il consiste en une «interprétation» pour reprendre le terme employé par R. Douady. Il n'y a donc rien de surprenant à ce que ce type d'analyse puisse être un élément essentiel *dans la formation des futurs enseignants.* Mais il n'y a rien de surprenant à ce qu'il ne puisse intervenir dans la formation des élèves qu'à travers «l'intervention du maître», ce qui, en définitive laisse plus souvent les élèves en situation de reconnaissance rétroactive qu'il ne leur donne les moyens d'une reconnaissance proactive. A moins qu'il n'y ait jamais à chercher «tout seul» (Douady 1986, p. 19).

L'analyse en amont requiert que l'on prenne en compte les différentes variations possibles d'un énoncé de problème ET les variations éventuelles de conduite et de production des élèves. Elle renvoie donc aux conditions permettant à sujet de pouvoir entrer, relativement rapidement, dans une démarche mathématique sur un type de problème. Et, dans cette perspective, la reconnaissance proactive, ou même seulement rétroactive, d'un «changement de ... » à effectuer est un enjeu décisif d'apprentissage. En effet, il doit être possible à un élève très ordinaire de mener une *activité mathématique* sans posséder déjà ne serait-ce que des bribes d'une culture mathématique. Indépendamment des exigences méthodologiques d'observation et d'interprétation auquel elle répond, l'analyse en amont travaille sur les conditions permettant à un sujet de développer une activité mathématique préalablement à l'acquisition d'une culture mathématique. C'est pourquoi une analyse de l'activité mathématique en termes de registres de représentation sémiotique est apparue aussi essentielle qu'une analyse en termes de cadres. Et cela un élément décisif pour *la formation des élèves.* La critique que l'on peut adresser à cette méthode d'analyse, d'un point de vue mathématique, n'est donc pas d'être non mathématique. Car comment pourrait-on étudier les problèmes de compréhension des démarches mathématiques que les élèves rencontrent dans les phases d'apprentissage, autrement que par des observations pratiquées systématiquement et de manière à ce que la généralisation des conclusions soit contrôlable ? Et, prendre comme donnée d'analyse un type de solution mathématique[1] dont on attend des élèves qu'ils soient conduits à le produire serait «psychologique» donc non mathématique ? Non, la critique que l'on peut faire à cette méthode est à chercher ailleurs. Cette méthode conduit à privilégier des problèmes «dégénérés» au détriment de «vrais» problème de recherche. «Dégénérés» parce qu'elle tend à décomposer la résolution d'un problème entre un ensemble de tâches qui peuvent être cognitivement hétérogènes, et que, parfois, elle conduit à isoler l'une de ces tâches et à pratiquer les variations sur cette tâche et non plus sur l'énoncé du problème. A la différence de la méthode en aval qui relève plus de la «synthèse», la méthode en amont est vraiment une analyse qui cherche à identifier les différents facteurs commandant la dynamique de pensée propre à un type de démarche mathématique. Pour étudier les problème d'apprentissage, il faut, d'une certaine manière, découpler activité mathématique et culture mathématique. Et force est de reconnaître qu'il reste encore beaucoup de zones obscures concernant l'apprentissage des mathématiques par tous les élèves, si «la *structuration personnelle* est de première importance en mathématique pour qu'il y ait effectivement savoir» (Douady 1986, p.19). Sur ce point on ne peut pas se contenter de constats comme «la connaissance de la classe s'est enrichie d'un théorème» (1986, p.20).

3. 4 Vous avez dit «problème» : quel type de problème ?

Il est surprenant, vu l'importance donnée à la notion de problème et à la résolution de problème, que la notion de problème reste finalement une notion floue. Il suffit de changer d'interlocuteur, ou de changer de niveau d'enseignement, pour que ce qui est considéré comme un problème ne le soit plus ou cesse de le devenir. Et cela indépendamment des connaissances présupposées par la résolution. L'embarras devient encore plus grand quand on examine l'emploi généralise du mot «problème» dans toutes les disciplines. Ce qui conduit à se demander s'il y a des différences spécifiques importantes (à la fois pour le fonctionnement cognitif et pour l'apprentissage) entre un problème mathématique et un problème non mathématique. Mais laissons cette question «transversale». Autrefois, Polya et à sa suite G.

---

[1] Quel que soit le diversité des types de solutions auxquels conduit l'analyse en aval, chaque solution peut relever d'une analyse en amont et donner lieu à des conclusions très différentes.

Glaeser, avaient tenté d'esquisser une classification des problèmes. Apparemment sans suite. Il est vrai que leur préoccupation était plus orientée vers une didactique de l'heuristique. Pourtant, même relativement à un «concept», les problèmes que l'on peut poser peuvent être de type très différents. D'un point de vue cognitif, en tous cas, on ne confondra pas en tous cas trois types de problèmes que nous appellerons respectivement :

- problèmes descriptifs

- problèmes de justification

- problèmes d'application

Les problèmes descriptifs sont les problèmes dans lesquelles l'essentiel du travail de recherche porte sur la constitution d'un corpus de données, pour prendre une analogie avec les démarches d'observations dans les autres disciplines. Sans la constitution d'un tel corpus, toutes les démarches d'explication ou de justification ou même de catégorisation notionnelles ne peuvent que tourner à vide. En mathématiques, la constitution d'un corpus de données coïncide avec la génération de données : il ne suffit pas de trouver seulement un exemple mais tous *les cas possibles* répondant à une condition fixée. En ce sens les problèmes que R. Douady donne en exemple sont des problèmes descriptifs (1986, p. 13, 20). A l'opposé, les problèmes d'application sont constitués par des énoncés narrato-descriptifs qui plantent des données quantitatives dans le décor d'un contexte non mathématique de données quantitatives, dans le but de faire utiliser un type de traitement mathématique. La caractéristique de ces énoncés est *de superposer deux descriptions de nature différente,* dont une seule est pertinente (Duval, à paraître). Il est intéressant de rappeler que les questions relatives à la compréhension des énoncés de problèmes mathématiques se réfèrent davantage aux énoncés de problèmes d'application qu'aux énoncés des autres types de problèmes.

Or le plus intéressant est que les «représentations» qui peuvent être utilisées pour la résolution des problèmes descriptifs ou pour celle des problèmes d'application ne sont pas du tout les mêmes. Pour les problèmes descriptifs, elles relèvent de registres de représentation qui peuvent remplir, d'un strict point de vue mathématique, une fonction de traitement : par exemple une figure (Douady 1986, p.16) ou un graphe (Douady 1986, p. 22). Ce qui suppose que l'on contrôle à la fois les phénomènes de congruence et de non congruence des conversions et ceux de leur sens. En revanche, pour les problèmes d'application, il n'en va plus de même. La fonction principale des représentations qui peuvent être utilisées est d'aider à comprendre l'énoncé, c'est-à-dire à faire discriminer les deux descriptions superposées et à rendre visible l'articulation des données quantitatives entre elles. C'est pourquoi de telles représentations ne remplissent pas une fonction de traitement et peuvent même apparaître mathématiquement sans intérêt. Cependant, leur utilisation par les élèves, bien que très transitoire, peut être essentielle et, surtout, leur choix doit répondre à un cahier des charges très précis pour justement favoriser la compréhension des énoncés et ne pas constituer un écran supplémentaire. Ce qui, hélas, est encore loin d'être le cas.

On voit donc la nécessité et l'urgence de recherches sur tout ce que recouvre le flou de l'emploi didactique du mot «problème» dans l'enseignement des mathématiques, surtout au niveau de l'enseignement obligatoire. Flou accentué par le recours à des modèles qui veulent rendre compte de tout apprentissage, aussi bien en mathématiques qu' en dehors des mathématiques ! Vous avez dit «problème» ?

Conclusion

Nous pouvons revenir à la question principale énoncée dans le titre et oublier les autres questions qu'elle nous a conduits à envisager. Elle vient de l'idée très forte que l'apprentissage des mathématiques ne pouvait se faire que lorsque les élèves se trouvaient dans une situation leur permettant de pratiquer une *activité mathématique*. Idée forte, parce qu'elle donne comme objectif à l'apprentissage des mathématiques la «structuration personnelle» et l'autonomie de la pensée, chaque élève devant être capable «tout seul» d'initiative et de contrôle dans la conduite de démarches mathématiques. On voit alors la complexité de la question que soulève un tel objectif : comment décrire et analyser une telle activité dont les productions sont loin d'être aussi rapidement accessibles que les productions des autres types d'activité scientifique ou culturelle et qui sont peu visibles dans l'environnement ?

La notion de «*changement de* cadre» constitue un apport important pour décrire et analyser l*a dynamique propre à l'activité mathématique.* Car elle met l'accent sur les changements de direction des actes de pensée, c'est-à-dire de la *noésis*, qui sont nécessaires pour être capable de mener *soi-même*, c'est-à-dire sans assistance, une démarche mathématique. Et on ne saurait trop rappeler combien cela a constitué un apport neuf par rapport aux caractérisations antérieures de l'activité mathématique que l'impérialisme axiomatique de la réforme de l'enseignement avait imposé vers les années 70 : un véritable squelette logicisant ayant entraîné dans sa chute la dépréciation du langage. Comme si le langage se réduisait à du vocabulaire ! On aura cependant remarqué que nous dissocions la notion de «changement de» direction de la pensée et la notion de «cadre». Car la question est à la fois de savoir comment repérer ces changements de direction de pensée en mathématiques et quelles sont les conditions requises pour que tout un chacun en devienne capable.

Le choix entre une approche en termes de cadre et une approche en termes de registres dépend de ce par rapport à quoi on va décrire l'activité mathématique : *la culture mathématique* de la communauté des mathématiciens ou *les systèmes de fonctionnement cognitif* permettant au sujet de conduire les différents types de démarches intellectuelles requis en mathématiques ?

L'organisation de l'enseignement à l'échelle d'une population implique évidemment une fragmentation curriculaire de cette culture mathématique. Et dans cette perspective, la dynamique propre à la pensée mathématique ne peut être décrite et analysée que contre l'inertie des multiples découpages curriculaires en concepts et en procédures. Les changements de cadre remettent au premier plan l'unité de cette culture comme nécessaire à l'activité mathématique. Et l'on voit d'ailleurs que cela constitue un des objectifs principaux de la formation des futurs enseignants de mathématiques.

En revanche, l'analyse des problèmes d'apprentissage rencontrés par les élèves en mathématiques, c'est-à-dire aux différents niveaux de l'enseignement et dans les différents contenus enseignés, conduit à regarder l'activité mathématique aussi par rapport aux systèmes de fonctionnement cognitifs requis par les divers démarches intellectuelles en mathématiques. Mais là, la présupposition d'un certain «isomorphisme» entre les démarches mathématiques et le fonctionnement cognitif commun à tout individu n'apparaît plus tenable. L'approche en termes de registre de représentation sémiotiques est née de ce constat. Et cela a conduit à rechercher la complexité sous-jacente aux changements de direction de la pensée. Les distinctions entre des transformations de représentation de type traitement ou de type conversion, la prise en compte des variations de conversion en fonction des types de registres mobilisés, la discrimination des types de traitement propres à chaque registre, renvoient à un ensemble de facteurs dont on peut toujours vérifier la pertinence et le poids dans les réussites et les échecs des élèves concernant leur compréhension et leur acquisition de connaissances mathématiques.

Cependant, chacun sait que la description et l'analyse de l'activité mathématique ne peut pas se limiter à ce qui en fait la dynamique propre, le «changement de...». Il y a tout d'abord le problème, trop souvent éludé[1], de l'accessibilité des objets mathématiques par rapport l'accessibilité d'autres objets de connaissance. C'est par rapport à ce problème que l'*articulation des représentations de registres différents* et, d'une manière plus profonde, celle de l'intrégration et de la coordination dans les structures cognitives du sujet des différents registres de représentation sémiotique, apparaissent d'un importance décisive pour l'apprentissage des mathématiques. Et cela d'autant plus que l'on estime que «la structuration (cognitive)[2] personnelle est essentielle au savoir mathématique» comme l'écrivait R. Douady. Cela ouvre deux champs de questions :

(1) Comment situer le modèle de fonctionnement cognitif que cette analyse conduit à développer par rapport aux modèles classique de psychologie cognitive centrés sur le traitement de l'information ? Ce qui revient à poser la question plus globale : quel modèle de sujet épistémique (cartésien, kantien, piagetien, modulaire...) implique l'apprentissage en mathématiques ?

(2) Dans nombre de situations, en mathématiques, on mobilise simultanément deux registres de représentation, soit sous la forme de représentations mixtes comme les figures géométriques incluant un codage des propriétés données à titre d' hypothèses, soit la forme d'un complexe de deux représentations comme, par exemple, avec les nombres polygonaux ou encore avec l'introduction de nombres tels que la racine carrée d'un nombre (cf. M. Rogalski). Cela implique évidemment, d'un point de vue cognitif, qu'une certaine articulation soit déjà maîtrisée par les élèves. Mais cela n'est pas suffisant. Il apparaît, en effet, que les représentations constituant ces représentations mixtes ou complexes peuvent remplir les unes par rapport aux autres des fonctions cognitives différentes. Par exemple, les représentations de type discursif peuvent remplir une fonction descriptive par rapport aux représentations de type «visuel». L'analyse de l'activité mathématique exige donc que les fonctions internes respectives des représentations combinées en des «hyper-représentations» mixtes ou complexes soient également prise en compte. Nous avons commencé de dégager les principes et la méthode d'une analyse fonctionnelle des représentations mobilisant simultanément plusieurs registres (Séminaire IUFM; 1999). C'est un peu l'étape qui suit toutes les recherches centrées sur les «changements» de cadre et de registres.

Entrées bibliographiques

[1] Cette question est une question sensible en raison de ce que nous avons appelé le paradoxe cognitif de la compréhension en mathématiques.

[2] Je me permet de glisser cette interpolation dans l'affirmation de R. Douady.

Douady R., 1984, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Thèse d'Etat, Université Paris7.
Douady R., 1986, Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, n°7.2 pp. 5-31
Douady R., 1992, Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères*, n°6 pp. 132-158
Duval R. ,1988a, Ecarts sémantiques et cohérence mathématique, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°1, 7-25.
Duval R., 1988b, Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°1, 57-75.
Duval R., 1988c, Graphiques et Equations : l'articulation de deux registres, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°1, 235-255
Duval R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine* Berne: Peter Lang
Duval R., 1998 Signe et objet (I) : trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet; Signe et objet (II) : questions relatives à l'analyse de la connaissance *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°6, 139-163,165-196 .
Duval R. , 2001, L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la designation des objets. *SFIDA n°* 13 IREM de Nice.
Duval R., Comment décrire pour expliquer ? (à paraître)
Laborde C. (2001) Analyse de textes de démonstration dans Produire et lire des textes de démonstration (Eds. E. Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J; Houdebine, C. Laborde). Paris : Ellipses.
Piaget J.,1967, *Biologie et connaissance*. Paris : Gallimard
Perrin M.-J., 2000, Des problèmes pour enseigner la géométrie à l'école. Des expériences spatiales aix objets géométriques. Conférence IUFM.
Saussure (de) F. 1973 (1915) *Cours de linguistique générale*, Paris : Payot.
Séminaire IUFM, 1999, ***Conversion et articulation des représentations analogiques*** (Dir. Duval R.). I.U.F.M. Nord Pas de Calais : D.R.E.D.