TP Méthode d'Euler

On cherche à construire la représentation graphique approchée de la fonction f solution de l'équation différentielle $y' = y$ telle que $f(0) = 1$. La fonction solution de cette équation est la fonction exponentielle notée exp.

Découpons l'intervalle [0;2] avec un pas de $h = 0.1$.

Les abscisses x_i pour i allant de 0 à 20 sont en progression arithmétique de premier terme $x_0 = 0$ et de raison $h = 0.1$.

Au lieu de se dépacer sur la courbe de la fonction solution (que l'on ne connait pas et que l'on suppose exister !), on se déplace sur les tangentes à chaque point ou plutôt à l'approximation de chaque point. En effet, dès la première itération, il y a un écart entre l'ordonnée du point obtenu par approximation affine et l'ordonnée réelle du point.

Que se passe-t-il en x_1 ?

$\exp(x_1) = \exp(x_0 + 0.1) \approx \exp(x_0) + 0.1 \exp(x_0)$

$\exp(x_1) \approx 1.1 \exp(x_0)$

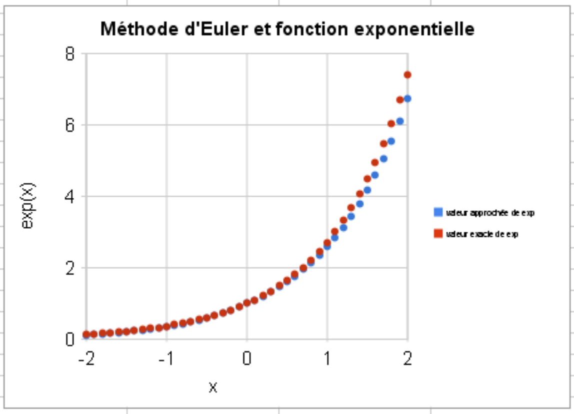
Exprimons $\exp(x_{p+1})$ en fonction de $\exp(x_p)$ (avec le symbole \`$\approx$\`) pour p entier naturel inférieur ou égal à 19 et montrons que l'approximation de $\exp(x_p)$ suit une progression géométrique dont on déterminera la raison.

Prenons une autre série d'abscisses y_i formée à partir de $y_0 = 0$ avec un pas de $h = -0.1$ et établir le même raisonnement que précédemment.

Placer les points trouvés précédemment sur un graphique (avec un tableur par exemple) et comparer avec la courbe théorique attendue $y = exp(x)$.

Créer un algorithme (avec Algobox par exemple) qui permet de calculer les valeurs approchées de $exp(1)$ pour différentes valeurs du pas (0.1 , 0.01 ...) ainsi qu'une évaluation de l'erreur relative commise dans chacun des cas.

	A	B	C	D
1	n	y et x	valeur approchée de exp	valeur exacte de exp
8	14	-1,4	0,22876792454961	0,24659696394161
9	13	-1,3	0,2541865828329	0,27253179303401
10	12	-1,2	0,282429536481	0,3011942119122
11	11	-1,1	0,31381059609	0,33287108369808
12	10	-1	0,3486784401	0,36787944117144
13	9	-0,9	0,387420489	0,4065696597406
14	8	-0,8	0,43046721	0,44932896411722
15	7	-0,7	0,4782969	0,49658530379141
16	6	-0,6	0,531441	0,54881163609403
17	5	-0,5	0,59049	0,60653065971263
18	4	-0,4	0,6561	0,67032004603564
19	3	-0,3	0,729	0,74081822068172
20	2	-0,2	0,81	0,81873075307798
21	1	-0,1	0,9	0,90483741803596
22	0	0	1	1
23	1	0,1	1,1	1,10517091807565
24	2	0,2	1,21	1,22140275816017
25	3	0,3	1,331	1,349858807576
26	4	0,4	1,4641	1,49182469764127
27	5	0,5	1,61051	1,64872127070013
28	6	0,6	1,771561	1,82211880039051
29	7	0,7	1,9487171	2,01375270747048
30	8	0,8	2,14358881	2,22554092849247
31	9	0,9	2,357947691	2,45960311115695
32	10	1	2,5937424601	2,71828182845904
33	11	1,1	2,85311670611	3,00416602394643
34	12	1,2	3,138428376721	3,32011692273655



euler et exp – Programme AlgoBox

```
VARIABLES
nbiter EST_DU_TYPE NOMBRE
pas EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
expo EST_DU_TYPE NOMBRE
erreur EST_DU_TYPE NOMBRE
puissance EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
AFFICHER "Entrez le nombre d'itérations pour calculer une valeur approchée de exp(1)"
LIRE nbiter
pas PREND_LA_VALEUR 1/nbiter
pas PREND_LA_VALEUR 1/10000000*round(10000000*pas)
AFFICHER "La valeur du pas est : "
AFFICHER pas
puissance PREND_LA_VALEUR 1+1/nbiter
expo PREND_LA_VALEUR pow(puissance,nbiter)
AFFICHER "L'approximation de exp(1) est :"
AFFICHER expo
AFFICHER "L'erreur commise est de : "
erreur PREND_LA_VALEUR (exp(1)-expo)/exp(1)*100
AFFICHER erreur
AFFICHER " %"
FIN_ALGORITHME
```