IUFM

Académie de Montpellier

Site de Montpellier

ABDDAIMI Youssef

TETIARAHI Moana

LE CONCEPT DE FONCTION ET SES DIFFERENTS REGISTRES EN SECONDE ET EN PREMIERE STT

Contexte du mémoire :

Discipline concernée : mathématiques.

Classes : Seconde et première STT.

Lycée Mas de Tesse, Montpellier

Lycée Georges Clémenceau, Montpellier

Tuteur de mémoire : Alain Le Borgne

Assesseur : Alain Bronner

Année : 2004/2005

Résumé

Notre mémoire a pour thème le concept de fonction et ses différents registres en classe de seconde et première STT.

Il a été l'occasion pour l'élève, d'une part, de construire et d'enrichir sa vision de la notion de fonction et ses différents registres, notamment le registre graphique. Et d'autre part, de donner du sens concret à un concept abstrait ou à de nouveaux objets mathématiques.

Summary

"Our topic was the concept of function and its various registers in class of second and the first STT.

For the students, it was the occasion to build and to enrich its vision of the concept of function and its various registers, in particular the graphic register. Then to give concrete direction to a new mathematical object."

Mots clés

♣ Fonction

♣ Concept

♣ Registre

MENTION ET OPINION MOTIVEE DU JURY

SOMMAIRE

Introduction

Comment en sommes nous arrivés à choisir comme sujet de mémoire, le concept de fonction et ses différents registres?

En effet, la découverte des fonctions est un enjeu capital pour les élèves de seconde car l'objet mathématique "fonction" apparaît dans tous les programmes des différentes sections de première et de terminale (STT, S, ES...).

C'est la raison pour laquelle nous pensons qu'il est nécessaire d'y porter une attention toute particulière des la classe de seconde afin que la plupart des élèves ne se présentent pas avec des lacunes inquiétantes en classes de première et terminale. Dans un premier temps, nous voulions limiter notre travail à l'introduction de la notion de fonction en classe de seconde. Mais, étant donné que nous devions mener des expérimentations dans nos classes respectives, le travail commencé en seconde a du être prolongé à la classe de première STT. De façon concrète, nous exploitons largement le registre graphique pour essayer de donner du sens aux objets manipulés et parce que c'est un aspect privilégié dans les programmes de nos classes respectives.

En classe de première STT, le conseiller pédagogique de Youssef lui a rappelé en début d'année que les élèves de cette série ont souvent eu des difficultés en mathématiques dans leur scolarité antérieure. Par conséquent, orienter la pédagogie dans le sens d'une réconciliation avec cette matière s'est avéré être une priorité. Son conseil a donc été de commencer par le chapitre "fonctions et lecture graphique". D'une part, parce que c'est un chapitre accessible à tous les élèves, et d'autre part, parce que le registre graphique prend une part importante dans le programme de première STT.

En classe de seconde, Moana s'est aperçu, par hasard, que pour certains élèves (même redoublants) la représentation graphique d'une fonction quelconque ne pouvait être qu'une droite. C'est alors qu'il s'est demandé comment enseigner à ses élèves le chapitre sur les fonctions. En discutant avec Youssef, il est ressorti que le registre graphique permettait d'éclairer les registres numériques et algébriques .Ainsi, Moana a décidé d'exploiter largement ce registre pour essayer de donner du sens aux objets manipulés. D'autant plus que la plupart de ses élèves souhaitent s'orienter vers les filières ES et STT et l'accent est mis, par exemple, dans le programme de première ES sur l'aspect graphique du travail relatif aux fonctions.

Nous traiterons, dans une première partie, de l'aspect théorique du concept de fonction et ses

différents registres. Ensuite nous ferons un bref survol des programmes du collège et du lycée.
Pour la classe de seconde, Moana traitera la partie introduction du concept de fonction et de ses différents registres.
Pour la classe de première STT, Youssef réinvestit le registre graphique pour introduire la notion de dérivation.
Au lycée, plusieurs approches de la dérivation sont possibles:

1- une approche essentiellement graphique qui part du coefficient directeur de la tangente en un point de la courbe représentative pour aboutir au nombre dérivé, en se passant du concept de limite.

2- une approche essayant de faire sentir la tangente comme position limite d'un faisceau de sécantes.

3- une approche qui essaye de faire le lien avec des concepts rencontrés dans d'autres disciplines tels que la vitesse instantanée par exemple.

Conformément au programme de première STT, il s'intéressera qu'a la première approche.
Dans cette perspective, Youssef a expérimenté dans sa classe trois activités :

- Un travail préparatoire sur le coefficient directeur d'une droite
- Une pproche des notions de tangente et de nombre dérivé
- La notion de fonction dérivée.

I. Apports théoriques

a) Le concept « fonction »

De nombreuses recherches en didactique des mathématiques ont concerné l'apprentissage des fonctions au début du lycée. Le concept de fonction est retenu par le savoir « savant » comme correspondance arbitraire et univoque entre une variable « x », élément d'un ensemble E, et une variable (dépendante) « y », élément d'un ensemble F (boite noire).
Pour comprendre ce qu'est le concept fonction, l'étude exclusive d'exemples ne suffit pas, mais ils sont nécessaires. En effet pour G.VERGNAUD, « Un concept ne peut être réduit à sa définition, du moins si l'on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant ».
Pour compléter ce petit apport théorique sur la construction d'un concept, il semble important d'évoquer Régine DOUADY qui, entre autre, introduit la dialectique outil-objet. Pour résoudre des problèmes, les mathématiciens sont amenés a créer des outils conceptuels. Ces concepts créés sont décontextualisés puis intégrés au corps des connaissances déjà constituées. Il acquièrent ainsi le statut d'objet. Les concepts mathématiques apparaissent d'abord comme outils implicites puis explicites dans la résolution de problèmes et n'acquièrent qu'ensuite le statut d'objet mathématique, c'est-à-dire, institutionnellement reconnus. Ils peuvent alors, à leur tour, être réinvestis dans la recherche de nouveaux problèmes.
Nous allons rappeler, maintenant, quelques définitions :

<u>Outil</u> : un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème.

<u>Objet</u> : est l'objet culturel ayant sa place dans l'édifice théorique des mathématiques qui est le savoir de référence à un moment donné, et qui est reconnu socialement.

<u>Cadre</u> : un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations diverses. On peut parler par exemple du cadre algébrique, arithmétique, géométrique ou fonctionnel ….

Dans cette logique et pour le cas qui nous intéresse, les fonctions doivent d'abord être utilisées comme outil de résolution pour que l'élève en comprenne bien le sens avant de devenir réellement pour lui un objet d'étude. Il nous semble que cela apparaît clairement lorsqu'on met en regard les programmes de seconde et de première sur le thème des fonctions.

b) Les différents registres associés aux fonctions :

Dans les situations d'apprentissage, les problèmes étudiés sont exprimés dans différents registres du concept étudié. En ce qui concerne les fonctions, les principaux registres de représentation sont les suivants :

- graphique : une courbe est un modèle de représentation de l'objet fonction comme ensemble de points du plan.

- algébrique : la loi fonctionnelle est donnée de manière explicite par une formule qui permet de calculer l'image f (x) pour tout x.

- programmation : un processus automatisé permettant d'obtenir des valeurs de la variable.

- tableaux : la loi fonctionnelle est ici réduite à une description discrète : à tout élément de l'ensemble de départ est associé sur la ligne (ou la colonne) suivante, la valeur de son image.

- Verbal : la loi fonctionnelle est exprimée en langage naturel.

- Schéma : diagramme sagittal.

c) Changement de cadres

Selon la situation considérée, tous les registres ne sont pas pertinents et il est important lors de l'apprentissage de montrer qu'il est parfois possible et même nécessaire de passer d'un registre à l'autre pour résoudre un problème. R. DUVAL estime qu'un concept est acquis dès que l'élève sait manipuler les différents registres du concept, connaît les traitements propres à chacun d'eux, sait passer de l'un à l'autre dans des tâches de conversion où d'association entre deux registres et arrive à choisir le registre le mieux adapté à son problème.
Comme le souligne Régine DOUADY « le changement de cadre est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils techniques qui ne

s'imposaient pas dans la première formulation ». Par exemple quand on traite en classe de première le cours sur l'existence de solutions des équations du second degré, on pose d'abord le problème dans un cadre algébrique avec l'écriture $ax^2 + bx + c = 0$ et on passe rapidement au cadre graphique avec la représentation de la parabole. Ici le cadre graphique est mieux adapté à la compréhension de l'existence de deux solutions, d'une solution ou d'aucune solution. Il est donc important de mettre, plus particulièrement, l'accent sur l'articulation des registres graphique et algébrique indispensables dans l'apprentissage des fonctions au lycée.
L'intérêt pédagogique des changements de cadres est donc de pouvoir choisir le registre le mieux approprié en vue d'introduire une propriété spécifique à l'objet étudié.

II. La notion de fonction dans les programmes

Nous faisons un bref résumé des apparitions dans les programmes du collège et lycée du langage des fonctions et de ses différents registres.

Classe de sixième :

Les fonctions sont présentes dans le cadre d' « organisation et gestion de données » et l'objectif est alors que l'élève sache lire un graphique non seulement dans le cadre de l'enseignement des mathématiques mais aussi dans celui des autres disciplines (les situations concrètes sont privilégiées). Ainsi, c'est dans cet esprit qu'une des compétences exigibles est de savoir appliquer un pourcentage grâce à la machine à calculer.

Le terme « fonction » n'est éventuellement utilisé qu'à l'occasion de l'utilisation de formules algébriques donnant l'aire ou le périmètre d'un rectangle et la longueur d'un cercle (par exemple). Pour ce faire, on peut utiliser les expressions « en fonction de » ou « fonction de »….

Classe de cinquième :

La proportionnalité est le fil conducteur du programme du cycle central. Elle doit être présentée dans des situations qui peuvent être numériques, graphiques ou géométriques.

Dans le même esprit que pour la classe de sixième, ces diverses présentations se veulent être aussi transversales que possible. Les élèves doivent être capables de reconnaître une situation de proportionnalité sur un tableau complet de nombres et de façon duale de « compléter un tableau de nombres représentant une situation de proportionnalité dont les données sont fournies partiellement ». On apprend aux élèves à déterminer un coefficient de proportionnalité sans pour autant exiger qu'ils sachent l'interpréter graphiquement ni même représenter les données d'un tableau de proportionnalité dans un repère.

Toutefois, en donnant des exemples concrets, les commentaires du programme suggèrent que les élèves soient confrontés à des situations de non proportionnalité et ce, toujours dans des situations issues de la vie courante. C'est à cette occasion que l'on voit apparaître pour la première fois la notion de variation et de variable.

Dans le document d'accompagnement, il est précisé que la substitution de nombres à des lettres permet d'effectuer des calculs numériques et de maîtriser les règles d'écritures d'expressions littérales. Cette substitution accompagnée de la constitution de tableaux de nombres et de la construction de points dans un plan muni d'un repère, prépare à la notion de fonction.

Classe de quatrième :

L'utilisation des moyens de calcul moderne est accentuée. La caractérisation de la proportionnalité sous la forme d'alignement de points avec l'origine fait partie des compétences exigibles (utilisation d'un grapheur). De plus, les élèves doivent avoir rencontré des contre-exemples de situation de proportionnalité. Elle apparaît à travers diverses applications comme, par exemple, l'utilisation de l'égalité d=vt ou encore le changement d'unités de vitesse. Les coefficients de proportionnalité sont aussi utilisés dans l'étude de certains problèmes : propriété de Thalès en géométrie, calculs sur les fractions dans le domaine numérique…La calculatrice est utilisée pour remplir un tableau de proportionnalité et les touches de passage à la racine carrée, d'élévation au carré, de passage à l'inverse doivent être utilisées par les élèves (ainsi que les touches donnant le cosinus et l'arccosinus).

Classe de troisième :

Pendant les années précédentes, les élèves ont été familiarisés avec les tableaux de nombres, formules et représentations dans le plan muni d'un repère à l'occasion d'études de situations de proportionnalité ou de résolution de problèmes particuliers. La classe de troisième permet d'expliciter la notion de fonction (au sens de correspondance univoque entre deux ensembles) à travers les exemples des fonctions affines et linéaires qui permettent de modéliser des situations de proportionnalité (aucune définition rigoureuse de la notion de fonction n'est attendue). C'est l'occasion de parler d'image d'un nombre par une fonction (affine) ou encore de représentation graphique de fonction. Les notations $x \to ax$ et f(x) sont introduites prudemment. Représenter graphiquement une fonction affine et utiliser une représentation graphique pour lire l'image d'un nombre donné (et le nombre ayant une image donnée) sont des compétences exigibles du programme de troisième..

Classe de seconde

La notion de fonction est présente tout le long du collège mais elle n'est explicitée qu'en classe de troisième. En seconde, la notion de fonction est abordée de façon plus générale et le programme demande à s'appuyer, par exemple, sur des situations simples de relations entre deux grandeurs : la fonction est alors considérée comme outil. L'étude des fonctions en tant qu'objet (c'est le cœur du programme de seconde où on introduit tout le vocabulaire nécessaire) peut parfois se faire lorsque les fonctions sont données par des courbes. Les élèves doivent alors savoir lire de façon critique un graphique.

<u>Classe de Première STT</u>

La notion de fonction a acquis le statut d'objet.

Le programme est organisé autour de deux objectifs principaux :

- acquérir une bonne maîtrise des fonctions de références et un certain savoir-faire, toutes les indications utiles étant fournies, pour l'étude de fonctions qui sont construites à partir de celles-ci par des opérations simples.
- exploiter la dérivation pour l'étude locale et globale des fonctions.

Comme en seconde, on mettra en valeur l'utilité du concept de fonction pour l'étude des phénomènes continus ; on exploitera largement des situations issues de la vie économique et sociale, en marquant les différentes phases : modélisation, traitement mathématique et interprétation des résultats. On exploitera systématiquement les interprétations graphiques et les problèmes numériques.

Concernant la dérivation, elle constitue l'objectif essentiel du programme d'analyse de première ; cet objectif est double :

- acquérir une première idée de la dérivation en un point à l'aide d'une approche graphique.
- exploiter les énoncés du programme concernant les fonctions dérivées pour l'étude des fonctions.

III. Description et analyse des expérimentations

1) Introduction

Dans cette partie, nous allons présenter et analyser les expérimentations que nous avons proposées dans nos classes. Nous avons en charge des classes de niveaux différents, une classe de seconde et une classe de première STT. Ceci nous a permis de voir l'évolution de la notion de fonction et ses applications à travers ses différents registres, et comment l'élève a évolué par rapport à cette notion.

Les activités proposées ont fait travailler les élèves sur l'introduction de la notion de fonction et ses différents registres, et notamment le registre graphique. Ce registre nous semble très intéressant et accessible aux élèves de nos classes respectives. Ce registre est largement présent dans les programmes des classes de seconde et première STT.

<u>Comment le concept de fonction à évolué à travers nos activités ?</u>

<u>En classes de seconde</u>

Dans les activités 1 et 2, le concept fonction apparaît comme un outil implicite

Dans l'activité 3, Nous avons voulu mettre en œuvre le changement de registres pour définir les fonctions de références.

Dans l'activité 4, la leçon sur les fonctions était déjà traitée. Le concept de fonction avait donc acquis son statut d'objet. Dans cette activité, l'outil fonction apparaît explicitement. Le changement de cadres est l'un des objectifs visés dans ce travail. Le changement de cadre, comme le dit judicieusement R. DOUADY à permis aux élèves d'obtenir des formulations différentes et non équivalentes pour accéder aux difficultés rencontrées et mettre en œuvre d'autres outils techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation

<u>En classe de première STT</u>

Dans les activités 5, 6 et 7, le concept de fonction apparaît comme outil explicite. Nous voulions donner du sens au nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente en un point de la courbe dans le registre graphique pour donner du sens à $f'(x)$ dans le registre algébrique. C'est le changement de registres qui était visé dans ces activités.

2) Expérimentation en classes de secondes

Activité 1

A. Description schématique de la séance

1. Le contexte

Lycée du Mas de Tesse à Montpellier : c'est un lycée polyvalent qui accueille aussi des élèves des alentours de Montpellier.

Ma classe : Seconde 4, tous les élèves font l'option SES. J'ai 34 élèves de niveau moyen voire très moyen (il y a 2 ou 3 élèves qui travaillent régulièrement). Seuls 2 élèves veulent aller en $1^{\text{ère}}$ S et le reste de la classe se destine à aller en $1^{\text{ère}}$ ES ou en $1^{\text{ère}}$ STT (une élève seulement en $1^{\text{ère}}$ L). La classe compte près d'une dizaine de redoublants qui ont souvent été la source de tensions dans la classe.

2. Objectifs

Chapitre en cours : Triangles isométriques et triangles semblables.

Nous avons fait un exercice qui demandait de reconnaître des triangles isométriques et il s'est posé la question de la recherche d'une aire minimale, prétexte à l'introduction des fonctions (il s'agit du chapitre suivant !).

3. *Le matériel de l'élève pour la séance.*

Je leur ai demandé d'apporter leur calculatrice. Certains n'ont pas de calculatrices donc j'en ai emprunté à l'IUFM.

Ils ont un classeur avec une partie cours, une partie exercices.

4 .Le scénario

PHASE 1 : Les élèves s'installent, appel.

PHASE 2 : Présentation du problème et consignes pour la Partie I (5 minutes)

PHASE 3 : Chaque groupe travaille sur la partie I (20 minutes)

PHASE 4 : Les feuilles de réponses sont ramassées. Synthèse au tableau. Introduction à la partie II par le professeur (5 minutes)

PHASE 5 : Chaque groupe travaille sur la partie II (15 à 20 minutes)

PHASE 6 : Les feuilles de réponses sont ramassées. Des remarques données par le professeur. Et la fois prochaine

PHASE 7 : Chaque groupe travaille sur la partie III

PHASE 8 : Les feuilles de réponses sont ramassées et conclusion par le professeur

B. Analyse à priori de la séance et justification des choix

5. Explication du contenu mathématique

Place dans la progression de la classe

Nous avons commencé la géométrie (configurations et transformations) après avoir traité les équations et inéquations. La partie relative aux triangles isométriques et aux triangles semblables étant bientôt terminée, nous commençons une séance d'introduction aux fonctions qui sera probablement terminée en fin de semaine prochaine.

Contenu mathématique :

TACHES	TECHNIQUES	THEORIES
Démontrer qu'un triangle est isocèle rectangle	Reconnaître des triangles isométriques. Trouver des angles égaux	Des triangles isométriques sont des triangles qui ont leurs côtés deux à deux de même longueur (les angles de l'un sont donc égaux aux angles de l'autre) La somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°
Trouver une expression algébrique	Exprimer des longueurs en fonction d'un paramètre x	Le théorème de Pythagore

6. Organisation didactique de la séance

a- Analyse des différentes phases de la séance et lien entre les conditions de travail, le rôle des élèves et le rôle du professeur.

PHASES	**CONDITIONS DE TRAVAIL**	**ROLE DES ELEVES**	**ROLE DU PROFESSEUR**
1	Figure projetée	S'installer	Appel
2	Feuille individuelle numéro 1 et feuille de réponses du groupe distribuées.	Ecoute des consignes	Donner les consignes à l'oral
3	Figure numéro 2 puis figure numéro 3 projetée Travail en groupe	Rédaction de la réponse de chaque groupe sur la feuille de réponse	En vue de la synthèse, passer dans les rangs et collecter les idées et erreurs de chaque groupe.
4	Les feuilles de réponses du groupe sont ramassées	Ecouter la synthèse puis compléter la feuille individuelle.	Synthèse au tableau. Introduction à la deuxième partie(CABRI)
5	Feuille individuelle numéro 1 et feuille de réponses du groupe distribuées. Calculatrices. Transparents pour les plus rapides.	Pour chaque élève, utiliser sa propre calculatrice. Placer les points sur le graphique Conjecture Rédaction de la réponse de chaque groupe sur la feuille de réponse.	Passer dans les rangs pour les problèmes liés à la calculatrice. Contrôle des tableaux et conjectures obtenus.
6	Les feuilles de réponses du groupe sont ramassées	Ecouter la synthèse puis compléter la feuille individuelle	Validation à l'aide du rétroprojecteur. Remarques puis questions à la classe sur la démarche mathématique.

b- Justification des choix

L'utilisation du vidéoprojecteur lors de la correction de l'exercice qui consistait à reconnaître des triangles isométriques a permis de mieux capter l'attention des élèves lors de la correction et les élèves ont semblé très intéressés par le problème d'optimisation soulevé. D'autre part, à la lecture des programmes du collège, il semble que la géométrie soit le domaine privilégié pour amener les élèves aux prémices de la pensée fonctionnelle. D'ailleurs, c'est une des pistes évoquées dans le document d'accompagnement.

En classe de seconde, l'objet fonction est explicité mais c'est dans l'esprit des programmes antérieurs que nous travaillons dans cette activité. En effet, à aucun moment l'objet fonction n'est explicité et le but ici est justement de montrer comment le langage des fonctions pourra éclairer la recherche de solution à notre problème. Ce sera là l'occasion de lever le voile présent jusqu'en classe de quatrième et de parler explicitement de fonction. Enfin, la courbe obtenue est un exemple de fonction dont la représentation graphique n'est pas une droite.

A priori, les élèves peuvent avoir des difficultés au niveau des racines carrées qui peuvent apparaître lors de l'application du théorème de Pythagore (typiquement, la linéarité de la racine carrée). Le changement de cadre est omniprésent et le graphique en est l'aboutissement afin de permettre à l'élève de mieux visualiser ce qu'il a fait précédemment et de valider une conjecture qu'il peut faire grâce au tableau de valeurs.

L'ACTIVITE PROPOSEE

On se place dans la situation (déjà rencontrée) suivante :

ABC est un triangle isocèle rectangle en B avec AB=BC=6.

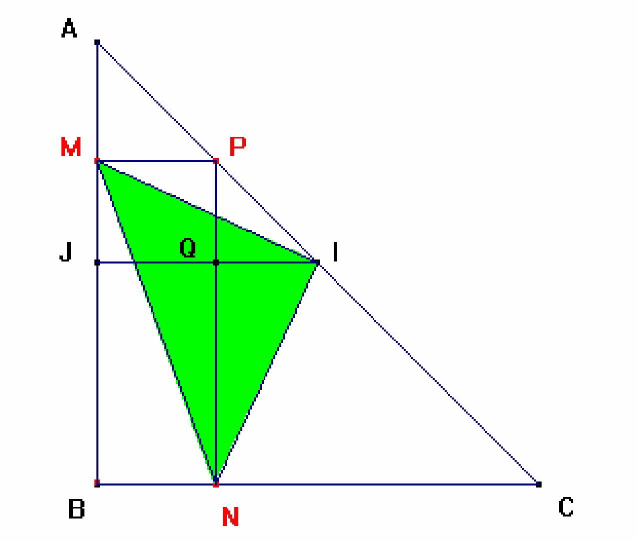
I est le milieu du segment [AC] et J celui de [AB].

On considère un point M libre sur [AB].

P est le point d'intersection de la droite (AC) avec la perpendiculaire à (AB) passant par M.

N est le point d'intersection de la droite (BC) avec la perpendiculaire à (BC) passant par P.

Q est l'intersection des droites (PN) et (IJ).



Le problème : Trouver l'aire minimale du triangle MIN lorsque le point M parcourt le segment [AB].

<u>Partie I: Une expression de l'aire du triangle MIN.</u>

On rappelle que nous avons **<u>démontré</u>** que les triangles QIN et MIJ sont isométriques.

<u>Question 1 :</u> Montrer que le triangle MIN est isocèle rectangle en I puis que l'aire du triangle MIN est égale à $\frac{1}{2}$ IN²

On pose AM = x .On rappelle que le point M est libre sur le segment [AB].

<u>Question 2 :</u> Quelles sont les valeurs que peut prendre le nombre x ?

<u>Question 3 :</u> Donner une expression de l'aire A(x) du triangle MIN en fonction de x.

<u>Partie II : Où l'on s'aide d'une calculatrice et d'un graphique pour conjecturer</u>

1-Remplir **<u>individuellement</u>** (au crayon) les tableaux suivants à l'aide de votre calculatrice (voir feuille jointe) puis compléter les phrases qui suivent.

Si x est égal à	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
alors A(x) est égal à																

Lorsque x augmente de 0 à 3, l'aire A(x) semble diminuer de …….. à ………..

Si x est égal à	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4	4.2	4.4	4.6	4.8	5	5.2	5.4	5.6	5.8	6
alors A(x) est égal à																

Lorsque x augmente de 3 à 6, l'aire A(x) semble augmenter de …….. à ………..

2-Placer les points de coordonnées (x ; A(x)) dans le repère dessiné sur la feuille de papier millimétré distribuée.

On **conjecture** alors que l'aire minimale du triangle MIN lorsque le point M parcourt le

segment [AB] vaut……………………et que cette aire minimale est atteinte pour x = ……

Partie III : Où nous démontrons notre conjecture

1- Pour tout nombre x compris entre 0 et 6, donner l'expression de A(x)–A(3).

2- En déduire que pour tout nombre réel x compris entre 0 et 6,

$$4,5 \leq A(x)$$

3-Donner alors la valeur minimale de l'aire du triangle MIN lorsque M est un point libre sur [AB].Quelle est alors la position du point M ?

Analyse a posteriori

Lors de cette séance, il y a eu deux aspects négatifs qui se sont manifestés. Le premier fut la gestion du temps. Je ne me suis pas rendu compte de la difficulté de l'exercice proposé. Les phases 1 à 4 ont mis une heure à être traitées alors que le reste de la séquence a pu se faire en une heure le lendemain. Cependant, il était possible de prévoir ce qui s'est passé mais j'étais tellement certain de la réaction des élèves face au travail proposé que je me suis trouvé démuni face à la situation ! Car c'est bien là le problème majeur qui est l'aspect le plus négatif de cette séance à mon sens : le travail demandé était impossible à faire pour un élève de ma classe (mon conseiller pédagogique m'avait pourtant prévenu).

Et pourtant, j'étais persuadé que les explications données sur l'exercice la fois précédente auraient suffit à la bonne compréhension du problème proposé. Hélas, non seulement la notion de triangle isométrique n'était pas encore assimilée par les élèves mais ils n'avaient pas encore assimilé celle-ci comme un outil de démonstration. De plus, je me suis aperçu que mes élèves étaient troublés par l'absence de mesures sur une figure géométrique et montrer que deux angles sont égaux (en montrant qu'ils sont égaux à un autre angle de la figure) est un exercice difficile. L'abstraction est difficile à appréhender pour mes élèves. J'aurai du prévoir toutes ces difficultés mais je n'avais pas de recul sur leurs capacités en géométrie et j'ai été très étonné par leurs difficultés. Enlever une portion de segment de longueur x à un segment de longueur 3 pour avoir l'expression de la portion restante en fonction de x est loin d'être un réflexe pour les élèves. Et même lorsque je leur posais la question directement, la bonne réponse ne venait pas à tous les élèves : pour eux, une longueur ne peut « valoir » $3-x$.

Cruelle désillusion aussi de voir que personne dans la classe n'a réussi à développer $(3-x)^2$ correctement ! J'ai remarqué ce phénomène chez les élèves dès que des identités remarquables apparaissaient dans des contextes autres que des exercices à consignes telles que : « développer », « utiliser une identité remarquable pour… ».Les élèves de troisième que je côtoie en stage de PA ont la même tendance et j'en ai discuté avec mon tuteur de PA qui me faisait remarquer que pour la plupart des élèves le calcul littéral n'avait pas beaucoup de sens et que, hors contexte, l'utilisation des identités remarquables n'était pas un réflexe. Il y avait vraiment trop de difficultés pour les élèves dans ce que je leur ai proposé à faire ce jour là (sans parler de l'impossibilité de montrer qu'un angle était droit sans mesures…).Le travail de groupe a été décevant car il y a eu certaines tensions entre élèves. Seuls un ou deux groupes ont bien joué le jeu.

Le vocabulaire « en fonction de » a été source de difficultés. Il semblerait que mes élèves aient complètement occulté cet aspect de leur cursus antérieur. Il en est de même de la notion de variable. Tout l'aspect fonctionnel qui était caché dans certaines de leurs activités mathématiques au collège s'est avéré absent ce jour là. Pourtant je reste persuadé que les élèves ont une pensée fonctionnelle non explicitée et il est intéressant de réactiver ce qui a sûrement été abordé au collège. La partie tableau de valeurs et représentation graphique a été fort bien réussie par les élèves et ils paraissent très intéressés lorsqu'il s'agit d'apprendre à utiliser leur calculatrice (et ce fût encore plus flagrant lorsque nous avons tracé des courbes, lu des images, changé de fenêtre d'affichage, zoomé sur des parties de la courbe etc…). Mieux, les élèves ont tout de suite émis la bonne conjecture une fois que le tableau de valeurs était compris ainsi que la représentation graphique. Ils ont été beaucoup plus rapide que ce que j'aurai pu imaginé. Cependant, il s'est avéré que la nécessité de démontrer la conjecture n'emporta pas l'adhésion de tous les élèves (et la phase de démonstration fut laborieuse, souvent les élèves partent de la conclusion). C'est d'ailleurs un phénomène omniprésent et un des objectifs de la classe de seconde est de bien faire distinguer à l'élève ce qui observé de ce qui est démontré.

Heureusement, ce qui me semblait être un demi-succès nous a été très utile. En effet, les élèves ont buté sur ce problème qui finalement est devenu pour nous une référence tout le long du cours. Il nous a servi pour illustrer la plupart des notions introduites dans le cours : la définition d'une fonction, ensemble de définition, les variations …). Malgré la présence de définitions à donner dans les devoirs surveillés, mes élèves rechignent à apprendre les définitions introduites dans le cours. Notre problème (qui leur a donné du mal) a permis à certains élèves de retrouver certaines définitions grâce à notre illustration (notamment pour la notion d'ensemble de définition, de minimum, de croissance et décroissance).Je pense que l'on peut dire que la difficulté de l'exercice et la volonté de trouver la solution du problème ont permis à certains élèves de s'approprier la situation proposée. Et par la même, certains ont pu aborder le concept de fonction d'abord comme outil implicite puis tout le long du cours comme outil explicite de résolution de problème. Le passage du registre verbal (essentiellement la partie concernant la géométrie) au registre algébrique fut une difficulté majeure (c'est un phénomène général) mais le passage au registre programmation et graphique a été mieux accepté par les élèves et leur a permis non seulement de conjecturer un résultat mais aussi de mieux appréhender le problème.

Activité 2

Le contexte de l'étude

La séance s'est déroulée en classe entière et était composée de deux phases de 25 minutes chacune (une phase par exercice).C'est un travail individuel qui est demandé sans aucune aide de la part du professeur (sauf pour l'utilisation de la calculatrice et si il y a des doutes sur les consignes).

Les objectifs

Il s'agit d'une activité d'introduction au chapitre sur les fonctions qui vient juste après l'activité 1. Dans un premier temps, on met en évidence la correspondance univoque entre deux nombres à l'aide du registre naturel. Ce qui nous amène à faire un tableau de proportionnalité, chose que les élèves ont souvent rencontré au collège.

Dans un second temps, on privilégie l'aspect graphique en faisant tracer une droite aux élèves sur leur calculatrice. Celle-ci nous permet de calculer le nombre *y* en donnant des valeurs au nombre *x* sur le même écran que la droite tracée. C'est bien la notion de « boîte noire » évoquée dans le document d'accompagnement de la classe de seconde dont il est question ici. Les élèves sont amenés à passer du registre graphique (étape de conjecture) au registre algébrique (phase de démonstration) , processus qui ne semblait pas emporter l'adhésion de tous les élèves lors de la première activité. Un des objectifs est d'amener les élèves à utiliser le registre graphique afin de valider des faits démontrés ou bien de faire des conjectures.

Enfin, c'est la première fois que mes élèves sont amenés à tracer une courbe sur leur calculatrice.

Les matériaux du travail de l'élève

Chaque élève travaillera sur une feuille d'énoncé. C'est un travail individuel mais le travail à deux est toléré. Les consignes sont données sur la feuille d'énoncé mais elles seront explicitées en début de séance. La calculatrice est obligatoire. Les réponses des élèves sont à donner sur une copie qui est ramassée à la fin de la séance.

L'organisation mathématique de la séance

Pré requis nécessaires

Les élèves sont supposés savoir reconnaître un tableau de proportionnalité et résoudre une équation et une inéquation

Présentation de l'exercice

Des tableaux, un graphique et une f……

Partie 1 :

On considère un « distributeur de nombre » qui à un nombre associe le double de ce nombre.

A quel nombre ce distributeur associe-t-il le nombre 1 ? On schématise cette situation de la façon suivante : *(l'énoncé était rétroprojeté, ce qui m'a permis de dessiner ici la « boîte noire »)*

A quel nombre ce distributeur associe-t-il le nombre 2 ? le nombre 3 ? le nombre x ?
Reproduire sur votre feuille le tableau suivant et le remplir :

Le nombre	1	2	2,5	3
est associé au nombre				

Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Justifier votre réponse

Partie 2 :

A l'aide de votre calculatrice, tracer la droite D d'équation

$$Y = 2X$$

(ne pas oublier de placer le curseur sur la droite D)

a- Donner l'ordonnée (lue sur le graphique avec la calculatrice) du point d'abscisse 0 de la droite D.
Faire de même avec les points d'abscisses 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3.
Reproduire puis compléter le tableau suivant :

Le point de la droite D d'abscisse	1	2	2,5	3
a pour ordonnée (lue graphiquement sur la calculatrice)				

b- Toujours à l'aide de ce graphique, quelle semble être <u>l'abscisse</u> du point de la droite d'ordonné 2,2 ?
Quelle équation doit-on résoudre pour trouver cette abscisse ? La résoudre puis vérifier que la réponse coïncide avec ce que vous venez de lire graphiquement.

c- En déplaçant le curseur sur la droite D, quelles semblent être les abscisses des points de la droite D dont l'ordonnée est plus grande que 1,2 ?
Quelle inéquation doit-on résoudre pour trouver les abscisses de ces points ?

Commentaire :

Il s'agit, en fait, d'étudier la fonction linéaire définie par f(x) = 2x et de son utilisation lors de la résolution d'une équation et d'une inéquation.

Dans la première partie, il s'agit de rendre « naturelle » (ou du moins de donner un exemple simple) la définition de la notion de fonction qui sera donnée en cours et, finalement, de faire remplir aux élèves un premier tableau de valeur sous la forme d'un tableau de proportionnalité.

Dans la seconde partie, on trace la représentation graphique de la fonction étudiée pour faire une lecture d'image. On demande de remplir un tableau de valeurs qui est le même que dans la première partie pour mettre en évidence le lien entre la notion de proportionnalité et les fonctions linéaires. L'exercice se termine par la résolution d'une équation et d'une inéquation : après une étape de conjecture on demande de les résoudre.

Il me semble intéressant de remarquer que l'utilisation d'une tablette de projection pour projeter l'écran de la calculatrice fut très bénéfique et que tous les élèves ont pu tracer correctement la droite étudiée.

Résultats :

Partie 1 :

La difficulté pour les élèves a été de justifier que le tableau était bien un tableau de proportionnalité. Seule une élève a utilisé le mot « coefficient de proportionnalité ».Sur 30 élèves présents, 12 n'ont pas donné de réponses. Onze élèves ont donné le type de réponse suivante :

Ce tableau est un tableau de proportionnalité car on multiplie la ligne du haut par deux pour trouver le nombre associé.

Un élève compare « les produits des extrêmes et les produits des moyens ».

Six élèves donnent des réponses étonnantes :

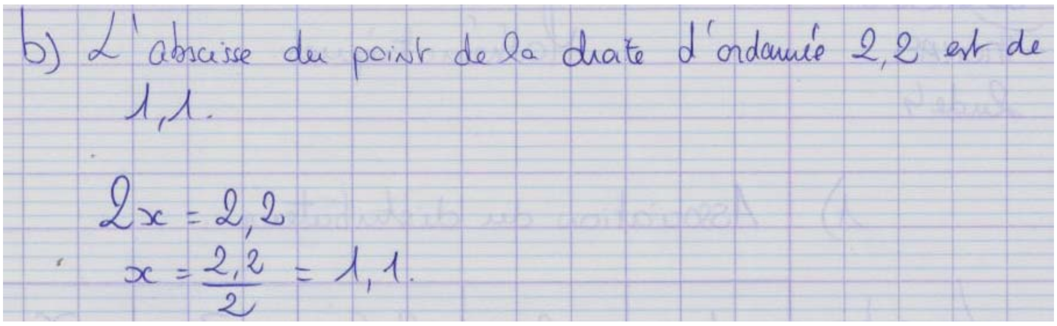
Oui se tableau est un tableau de proportionnalité car ils coïnsident entre eux.

Ce tableau est bien un tableau de proportionnalité car les nombres de la ligne du bas augmentent en même temps que ceux de la ligne du haut.

Ce tableau est un tableau de proportionnalité car on associe à chacun le produit de lui-même et de son double.

Partie 2 :

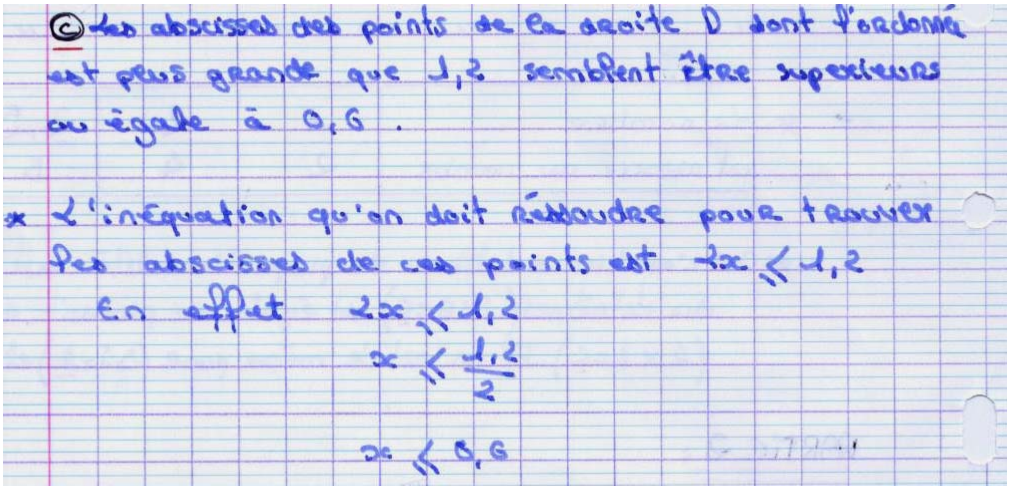
La question a- a été bien traitée par tous les élèves. Huit élèves n'ont rien écrit de plus mais je pense qu'ils se sont contentés de regarder le résultat sur l'écran de la calculatrice. Pour la question b, 12 élèves ont à la fois lu graphiquement le résultat puis donner l'équation à résoudre puis sa solution.



Parmi eux, seuls 4 élèves mentionnent qu'ils obtiennent le même résultat.

Dix élèves se contentent du résultat lu graphiquement et s'arrête à cette question.

Finalement, la question c- a donc été abordée par 12 élèves. Sept élèves ne donnent que le résultat. Cinq élèves donnent une réponse correcte et soignée.



.

Commentaires :

Cela n'est pas la première fois que je remarque que mes élèves abandonnent assez rapidement dès que la solution (et non pas la méthode) ne leur saute pas aux yeux. Seul un tiers de la classe sait reconnaître un tableau de proportionnalité en le justifiant correctement. En fait, il me semble que les élèves savent que c'en est un mais ne parviennent pas à l'exprimer de façon correcte. Par contre, le fait que le mot coefficient de proportionnalité n'apparaisse que chez une seule élève me paraît inquiétant au niveau seconde. Dans la partie 2, on s'aperçoit que 22 élèves trouvent la bonne réponse mais que 10 s'en contentent sans continuer. Je me suis rendu compte que la plupart des élèves connaissaient les mots abscisses et ordonnées mais que dès qu'il s'agissait d'abscisses en tant que solutions cela posait problème. C'est ainsi que lorsque nous avons reparlé de résolution graphique d'équations (car il s'agissait bien de cela ici), je sentais que c'était une approche difficile pour eux. De manière générale, les élèvent hésitent beaucoup à utiliser les mots abscisses et ordonnées. Le passage du registre graphique au registre algébrique n'a pas rebuté la majorité des élèves mais le fait de comparer les résultats obtenus dans chacun de ces deux registres n'a été que très peu présent. Ce fut pour moi une occasion d'insister sur le fait qu'un résultat observé appelle naturellement une démonstration

Activité 3

Le contexte de l'étude

La séance s'est déroulée en classe entière et était composée de deux phases de 25 minutes chacune (une phase par fiche distribuée).C'est un travail individuel qui est demandé sans aucune aide de la part du professeur (sauf si il y a des doutes sur les consignes).

Les objectifs

Il s'agit d'une activité d'introduction de certaines des fonctions de références au programme : les fonctions carré, inverse et une fonction affine avec en plus la fonction racine carrée (hors-programme). Les élèves sont amenés à se familiariser avec des représentations graphiques qui seront reprises dans le cours. Le registre graphique est utilisé (via un tableau de valeurs) pour faire deviner aux élèves les expressions algébriques des fonctions étudiées. C'est aussi là l'occasion de rappeler les avantages et inconvénients des registres graphiques et algébriques. Le registre numérique (calculatrice) sera, quant à lui, exploité durant l'heure suivante où le cours à proprement parler sera donné. Enfin, c'est un bon indicateur de l'avancement de l'élève dans la compréhension de la notion de fonction mais aussi de la pratique de la lecture graphique et du changement de cadre.

Les matériaux du travail de l'élève

Chaque élève travaillera sur deux fiches d'énoncé (recto verso) à trous intitulée « Courbes numéro i » (i étant égal à 1 ; 2 ; 3 ou 4).C'est un travail individuel. Les consignes sont données sur les fiches mais elles seront explicitées en début de séance. La calculatrice est interdite.

L'organisation mathématique de la séance

Place dans la progression

1. Généralités sur les fonctions
2. Variations des fonctions

Pré requis nécessaires

Les élèves sont supposés savoir :

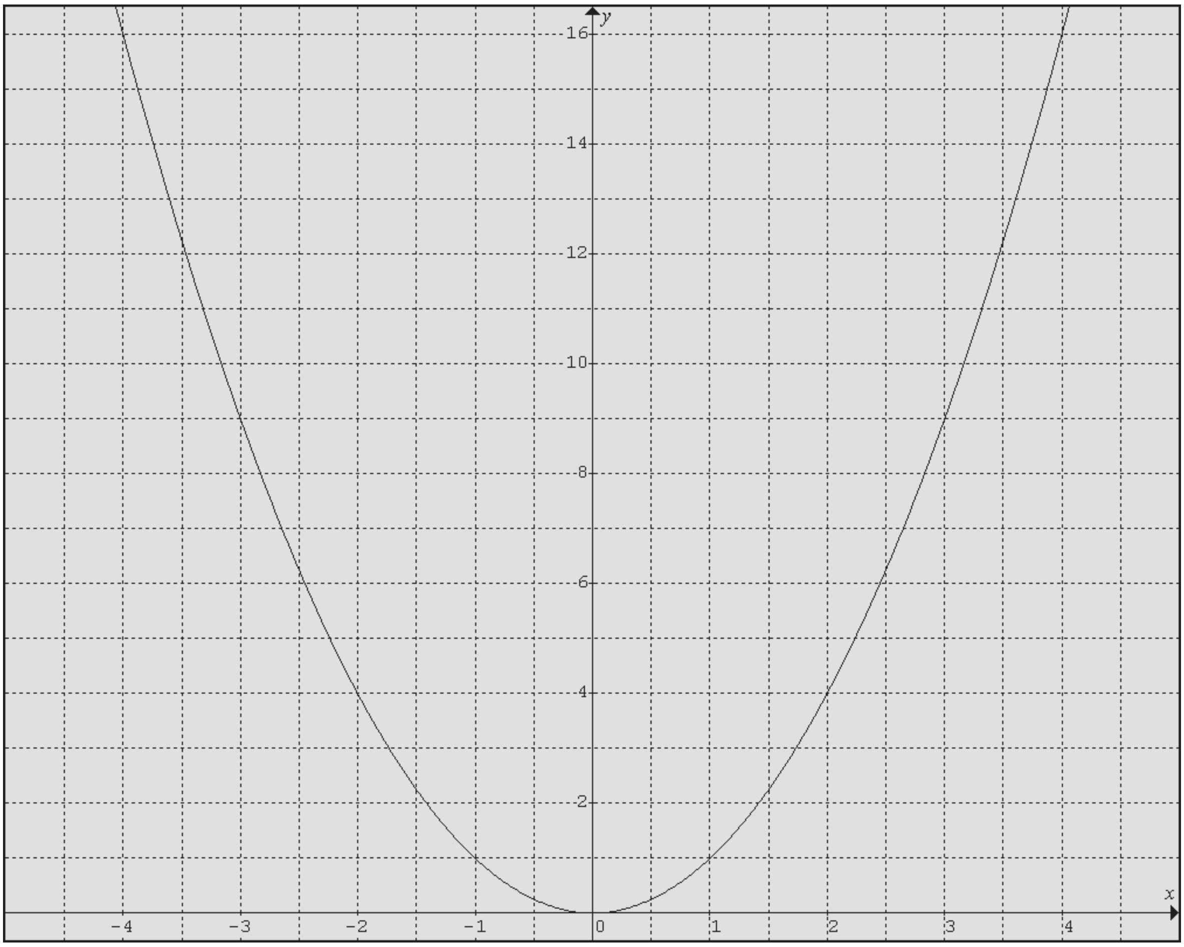
Lire graphiquement l'image d'un nombre par une fonction représentée graphiquement dans un repère. Connaître le vocabulaire usuel du calcul algébrique du collège : carré, inverse, opposé, racine carrée.

Présentation de l'exercice

Les élèves devaient répondre aux questions suivantes pour chaque courbe proposée :

Courbe numéro 1

On suppose que la figure suivante donne la courbe représentative d'une fonction f.



Question 1 : En effectuant une lecture graphique, remplir le tableau suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)									

Question 2 : Par quel procédé passe-t-on d'un nombre de la première ligne au nombre de la deuxième ligne de la même colonne ? L'expliquer avec vos mots sans utiliser de formule contenant la lettre *x*.
Question 3 : En vous aidant de la réponse à la question précédente, donner la formule (algébrique) qui semble permettre de calculer l'image d'un nombre x par la fonction f.
Question 4 : Donner les images des nombres $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ et 101 par la fonction f en indiquant la (ou les) méthodes utilisées.

- La question **1** permet à l'élève de pratiquer encore une fois la lecture graphique de l'image d'un nombre par une fonction donnée par sa représentation graphique. Il s'agit ici de remplir un tableau de valeur.
- La question **2** amène l'élève à utiliser le langage naturel pour décrire une correspondance entre deux nombres.

- C’est le registre algébrique qui est abordé dans la question **3** : il est demandé à l’élève de traduire algébriquement la réponse donnée à la question précédente.
- Enfin la question **4** demande des calculs d’image. Il s’agit ici de faire un choix (lorsqu’il y en a un) : faut-il utiliser la représentation graphique de la fonction ou l’expression algébrique ? La confrontation entre le registre algébrique et le registre graphique est mis en avant dans cette question.

Résultats :

La question **1** a été réussie par 32 élèves sur 33 pour toutes les courbes proposées. Le tableau de valeurs ne pose aucun problème

Courbe numéro 1 : la fonction carré (voir ci-dessus)

Question 2 : Parmi les élèves qui ont compris le procédé dont il était question, on peut distinguer deux groupes : ceux qui utilisent l’expression « multiplier le nombre par lui-même » (7/24) et ceux qui utilisent le terme « carré » (17/24). Sept élèves se sont contentés d’essayer d’expliquer comment ils ont lu graphiquement les images des nombres proposés et n’ont pas trouvé la formule algébrique demandée.

Question 3 : Très bien traitée par les 24 élèves qui ont bien répondu à la première question. Les autres élèves n’y ont pratiquement pas répondu ou rappelle une méthode qu’ils ont vue. Certains écrivent bien $f(x)=x^2$ mais enchaînent en écrivant $x = \sqrt{f(x)}$.

Question 4 : Pratiquement tous les élèves qui ont obtenu la bonne formule algébrique l’ont utilisée pour calculer les images demandées mais près de la moitié d’entre eux n’ont pas trouvé le carré de 101.Seuls deux élèves ont pensé à utiliser une identité remarquable.

Deux réponses d'élèves :

Question 2 : Par quel procédé passe-t-on d'un nombre de la première ligne au nombre de la deuxième ligne de la même colonne ? L'expliquer avec vos mots sans utiliser de formule contenant la lettre x. Ces chiffres sont des données de la courbe. Au croisement des deux chiffres dans la figure il y a la courbe. On prend un chiffre (ex : -4) on remonte sur sa verticale jusqu'au passage de la courbe, puis on va à l'horizontale lire le second chiffre (16)

Question 3 : En vous aidant de la réponse à la question précédente, donner la formule (algébrique) qui semble permettre de calculer l'image d'un nombre x par la fonction f.

Pour trouver l'image d'un nombre on utilise f(x)

Question 4 : Donner les images des nombres $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ et 101 par la fonction f en indiquant la (ou les) méthodes utilisées. L'image de $\sqrt{2}$ par la fonction F est $\simeq 1,8$
l'image de $-\sqrt{2}$ par la fonction F est $\simeq 1,4$. On ne peut pas connaître ici l'image de 101 par la fonction f car la courbe s'arrête vers 16. J'ai utilisé la méthode de la question 2.

Question 2 : Par quel procédé passe-t-on d'un nombre de la première ligne au nombre de la deuxième ligne de la même colonne ? L'expliquer avec vos mots sans utiliser de formule contenant la lettre x.

Pour passer de la première ligne à la desième on a mit au carré les nombre de la première ligne.

Question 3 : En vous aidant de la réponse à la question précédente, donner la formule (algébrique) qui semble permettre de calculer l'image d'un nombre x par la fonction f.

$f(x) = x^2$

Question 4 : Donner les images des nombres $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ et 101 par la fonction f en indiquant la (ou les) méthodes utilisées.

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 = 8$ $\quad f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}^2 = 8$ $\quad f(101) = 101^2 = 10201$

Pour trouver l'image de ces nombres on remplacer x par les nombre $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$ et 101 puis on a appliquer la formul $f(x) = x^2$

Commentaires : On s'aperçoit que dès que le registre algébrique apparaît, les élèves l'utilisent pour calculer les images de la question 4 alors que certains qui n'ont pas obtenu de formule algébrique donnent quand même une réponse pour l'image de 101.Le carré de $-\sqrt{2}$ pose toujours un problème aux élèves (absence de parenthèses) mais quelques un ont pu corriger leur erreur grâce à une lecture graphique (le fait qu'un carré soit toujours positif ne semble pas parfaitement connu). Le calcul du carré du nombre 101 a paru insurmontable sans calculatrice mais quelques élèves ont spontanément posé la multiplication. Deux élèves ont pensé à écrire une identité remarquable malheureusement erronée mais l'idée était là (c'est une situation déjà rencontrée dans l'année).Le bon résultat a été donné par 22 élèves.

Durant le cours les élèves ont tout de suite reconnu la courbe de la fonction carré, ce fut alors l'occasion de leur demander les variations de la fonction et de mettre l'accent sur ce qui est observé et sur ce qui doit être démontré.

Courbe numéro 2 :la fonction inverse (voir annexes)

Question 2 : Vingt élèves ont donné une réponse correcte (en les aidant souvent à mettre les nombres décimaux obtenus sous forme fractionnaire) mais seuls 7 d'entre eux ont utilisé le mot « inverse » pour y répondre. Voici quelques réponses d'élèves :

Question 2 : Par quel procédé passe-t-on d'un nombre de la première ligne au nombre de la deuxième ligne de la même colonne ? L'expliquer avec vos mots sans utiliser la lettre x.

Il faut mettre les chiffre de la ligne 1 au denominateur dans la colone 1ère ligne et au numerateur toujours 1.

On prend le chiffre 1 et on le divise par les chiffre de la 1ère ligne.

pour passer de la première colone a la deuxieme on fait 1 divisé par la première colone.

On fait 1 divisé par les chiffres de la 1ère ligne.

on passe de la première ligne à la deuxième ligne de la même colone en divisant $\frac{1}{\text{première colonne}}$

Question 3 : Très bien traitée par 18 des 20 élèves qui ont bien répondu à la première question. Les deux élèves restant ont confondu inverse et opposé Les autres élèves n'y ont pratiquement pas répondu et deux d'entre eux donnent des expressions de fonctions affines.

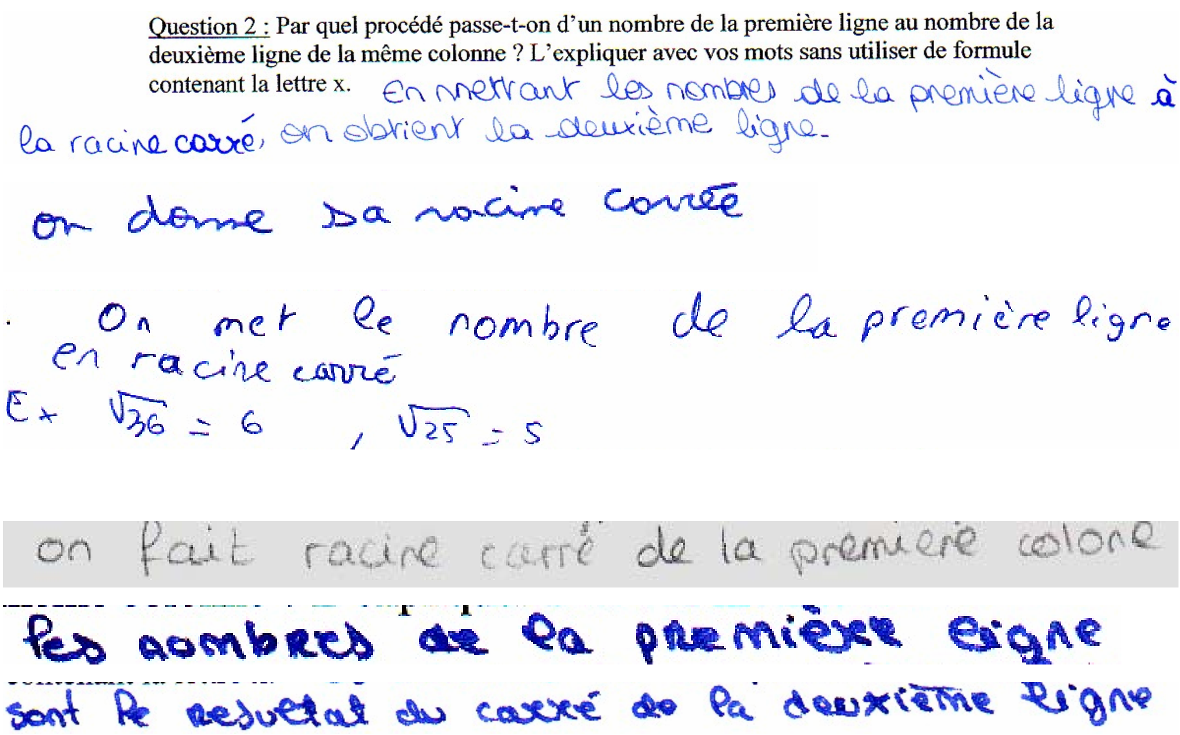
Question 4 : Tous les élèves qui ont obtenu la bonne formule algébrique l'ont utilisée pour calculer les images demandées mais huit d'entre eux écrivent encore $\frac{1}{3} = 0,33$. La lecture graphique a été utilisée par cinq des élèves qui n'ont pas trouvé de formule algébrique.

Commentaire : Lorsque les élèves ont rempli le tableau de valeur, l'écriture fractionnaire (salvatrice ici) des nombres n'a pas sauté aux yeux de tous les élèves : il a fallu leur suggérer d'écrire les images lues sous une forme différente de l'écriture décimale.

Beaucoup d'élèves trouvent la réponse à la question relative au langage naturel mais c'est souvent avec beaucoup de maladresse qu'ils expriment leur idée. Cela ne leur pose pas de problème pour proposer une formule algébrique correcte alors que, parmi ceux qui utilisent l'expression « inverse », certains proposent une formule faisant intervenir l'opposé de *x*.

<u>Courbe numéro trois : la fonction racine carrée (voir annexes)</u>

<u>Question 2 :</u> Seuls sept élèves n'ont pas donné de réponse correcte. Parmi les bonnes réponses, il est remarquable que l'expression « prendre la racine carrée » n'ait été utilisée que par 3 élèves. D'autres s'en sortent très habilement sans « voir »de racine carrée. Voici quelques réponses données :


<u>Question 2 :</u> Par quel procédé passe-t-on d'un nombre de la première ligne au nombre de la deuxième ligne de la même colonne ? L'expliquer avec vos mots sans utiliser de formule contenant la lettre x. En mettant les nombres de la première ligne à la racine carré, on obtient la deuxième ligne.

on donne sa racine carrée

On met le nombre de la première ligne en racine carré
Ex $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{25} = 5$

on fait racine carré de la premiere colone

les nombres de la première ligne sont le resultat du carré de la deuxième ligne

<u>Question 3 :</u> Très bien traitée par les élèves qui ont bien répondu à la première question. **<u>Question 4 :</u>** Tous les élèves qui ont obtenu la bonne formule algébrique l'ont utilisée pour calculer les images demandées mais cinq d'entre eux se sentent obligé de mettre une valeur approchée de $\sqrt{2}$ (la calculatrice étant interdite, les élèves n'étaient pas tentés de le faire). Cela dit, 8 élèves ont confondu image et antécédent à cette question. Enfin, la lecture graphique a été utilisée par les élèves qui n'ont pas trouvé de formule algébrique.

Signalons le cas d'une élève qui n'a trouvé aucune formule algébrique (pour les quatre courbes proposées lors de cette séance) mais qui s'en sort de la façon suivante :

Question 2 : Par quel procédé passe-t-on d'un nombre de la première ligne au nombre de la deuxième ligne de la même colonne ? L'expliquer avec vos mots sans utiliser de formule contenant la lettre x.

On passe d'un nombre de la 1ère ligne au nombre de la 2e ligne en liant graphiquement l'axe des ordonnés y par rapport à l'axe des abaisses et passant par la courbe

Question 3 : En vous aidant de la réponse à la question précédente, donner la formule (algébrique) qui semble permettre de calculer l'image d'un nombre positif x par la fonction f.

$f(x) = a$ (nombre positif)   On remplace tous les x dans la fonction qui définit $f(x)$

antécédent   image

Question 4 : Donner les images des nombres 2 et 100 par la fonction f en indiquant la (ou les) méthodes utilisées.

La méthode utilisé est la lecture par graphique c'est à dire qu'on lit l'axe des ordonnés pour trouver l'image.
L'image de nombre 2 par la fonction f est a peu près 1,4.
100 n'a pas d'image

Commentaire : Dans ce dernier cas, il s'agit d'une élève travailleuse et qui connaît assez bien le cours mais sa méconnaissance des nombres fait que le changement de cadre lui est impossible. Elle se réfugie derrière ses connaissances sur la lecture graphique. Le fait que le nombre 100 n'ait pas d'image montre que la convention sur le domaine de définition d'une fonction définie par la donnée de sa courbe ne lui est pas acquise. Plus globalement, le vocabulaire est encore ici mal adapté mais la plupart des élèves arrivent à faire le lien avec la racine carrée. Encore une fois, dès que la formule algébrique est trouvée, elle est automatiquement utilisée. Autrement, les élèves se contentent d'une valeur approchée (en le signalant).

Courbe numéro quatre : une fonction affine (voir annexes)

Question 2 : Il s'agissait d'une question difficile qui a posé beaucoup de problème aux élèves. Seuls cinq ou six élèves ont trouvé la bonne réponse. Il est remarquable qu'aucun des redoublants n'ait trouvé la bonne réponse à cette question. Malgré toute l'aide (relative) apportée aux élèves, il n'ont pas « vu » la bonne réponse. Au bout d'un quart d'heure de recherche, la bonne réponse a circulé parmi les élèves.

Question 2 : Par quel procédé passe-t-on d'un nombre de la première ligne au nombre de la deuxième ligne de la même colonne ? L'expliquer avec vos mots sans utiliser de formule contenant la lettre x. On multiplie par -1 et on additionne 1 au nombre de la première ligne pour obtenir le nombre de la deuxième ligne de la même collone.

on passe de la première ligne à la deuxième ligne en multipliant la première ligne par -1 et en ajoutant 1.

on le multiplie par -1 et on ajoute 1

On ajoute 1 à l'inverse du nombre de la première ligne pour trouver la deuxième ligne

Question 3 : La diversité des formules algébriques obtenues à partir d'un procédé en langage naturel dénotant une compréhension correcte est étonnante. Seuls six élèves ont donné $-x+1$ comme expression algébrique. Voici quelques propositions :

l'image d'un nombre x par la fonction f est $(x \times (-1))+1$

la formule est $x(-1+1)$ ex $-4x(-1+1)=5$.

$f(x) = x(-1)+1$

Question 4 : Cette question a été bien traitée par ceux qui ont trouvé une formule algébrique correcte. Les élèves qui ne l'ont pas obtenue ont pu se servir de la courbe pour lire une image mais toujours en précisant que la lecture était approchée.

Commentaire : La question relative au langage naturel était loin d'être évidente car il fallait mettre en évidence deux opérations alors que pour les courbes précédentes cela n'était pas le cas. Mais une fois que les élèves l'ont obtenue tant bien que mal (par exemple la confusion entre inverse et opposé apparaît encore parfois), le passage au cadre algébrique a été plein de surprises : trois élèves utilisent les symboles mathématiques de façon erronée tout en effectuant les bonnes opérations. La lecture graphique reste un refuge pour les élèves qui n'ont pas trouvé de formule algébrique mais, et cela a son importance, ils gardent pour la grande majorité une lecture critique de l'information donnée par la courbe.

Présentation d'une autre activité

Contexte et présentation de l'activité

Cette activité a été expérimentée dans la classe de seconde du conseiller pédagogique de **Youssef**. Celui-ci avait déjà traité le chapitre sur les fonctions et variations. Il s'agit de réinvestir les différents cadres et registres pour traiter un problème d'optimisation. En effet l'activité permettait de se placer dans différents cadres : géométrique, algébrique, tableaux (de valeurs et de variations) et graphique d'une fonction. Elle permettait aussi de passer d'un registre à l'autre dans des tâches de conversions.
Cette activité était également l'occasion pour revoir les notions de maximum et de variation d'une fonction.
C'est un travail de groupes qui était proposé aux trente deux élèves de la classe. Nous avons formé huit groupes de quatre élèves. Un travail par groupe est rendu à la fin de l'activité sur des fiches à trous distribuées auparavant. La séance a duré une heure et s'est déroulée en trois phases :

Phase de conjecture

On se place dans le cadre géométrique, les élèves devaient représenter les rectangles AMNP et calculer son aire pour différentes positions du point libre M, puis conjecturer la position du point M pour laquelle l'aire semble-t-elle maximale.

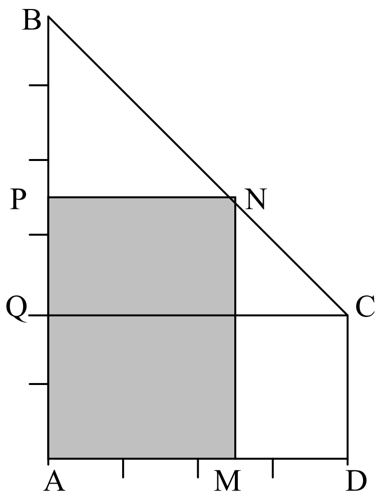
Phase de démonstration

On se place dans le cadre algébrique en introduisant la variable x = AM. A partir de la géométrie l'élève devait donner l'intervalle de définition puis en utilisant le théorème de Thalès il devait trouver l'expression algébrique de l'aire A(x). En étudiant ses variations, il doit donner la valeur de x qui rend l'aire maximale.

Phase de vérification

Dans cette phase ce sont les registres tableau et graphique qui sont mis en évidence. En utilisant sa calculatrice, l'élève doit remplir un tableau de valeur puis tracer la courbe représentative de la fonction A. Il doit lire sur son graphique la valeur de x qui rend l'aire maximale et par suite vérifier les réponses des deux premières phases.

Activité 4



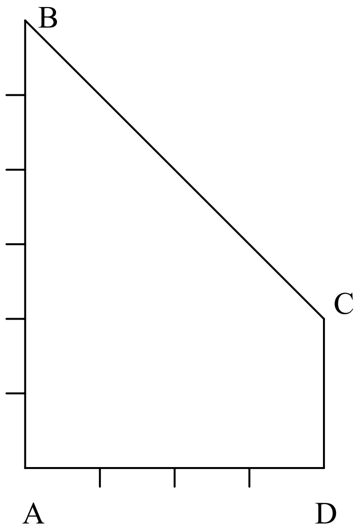
On considère un trapèze rectangle ABCD tel que AB = 6cm, AD = 4cm et CD = 2cm. On note Q, le point du segment [AB] tel que AQ = CD.
Le point M décrit le segment [AD].
On considère le rectangle AMNP où N et P appartiennent respectivement aux segments [BC] et [AB].
On se propose de chercher pour quelle position du point M l'aire du rectangle AMNP est maximale ?

I. Etape de conjecture

Partie géométrique

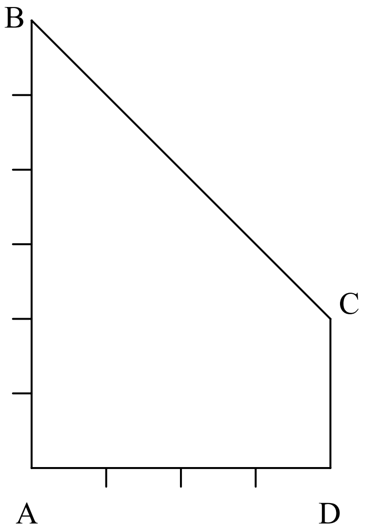
_Représenter dans chacun des cas suivants, le rectangle AMNP et calculer son aire.

AM = 0cm



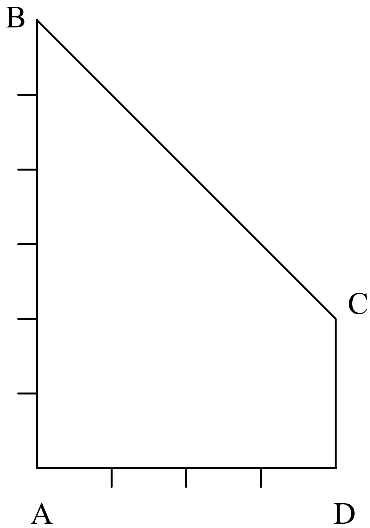
Aire = ...

AM = 1cm



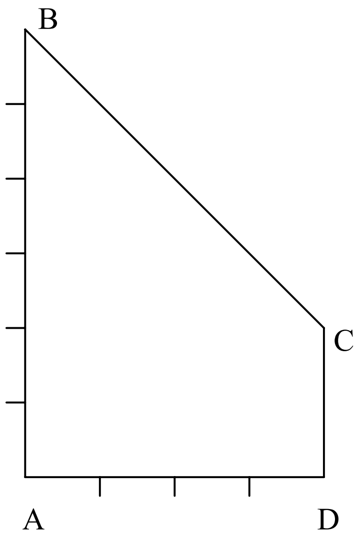
Aire = …………

AM = 2cm



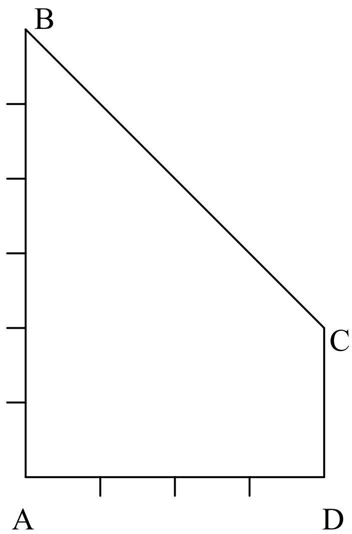
Aire = …………

AM = 3cm



Aire = ………..

AM = 4cm



Aire = ………..

1) Pour quelle position du point M, l'aire du rectangle AMNP semble-t-elle maximale ?

....

II. Etape de démonstration

Partie algébrique

On pose AM = x

1) Dans quel intervalle I varie x ? I = ...

....

2) a) A l'aide du théorème de Thalès dans le triangle BQC, montrer que BP = x

....

b) En déduire AP en fonction de x AP = ...

3) Calculer l'aire A(x) du rectangle AMNP en fonction de x.

A(x) = ...

4) Montrer que $A(x) = 9 - (x - 3)^2$

....

5) a) Etudier les variations de A sur les intervalles [0 ; 3] et [3 ; 4]

Sur [0 ; 3]

....

Sur [3 ; 4]

....

b) Compléter le tableau de variation de A

….	…. …. …..
……	

6) Pour quelle valeur de x l'aire A(x) est-elle maximale ?

....

III. Etape de vérification

Partie lecture graphique

1) En utilisant le tableur de votre calculatrice compléter le tableau suivant :

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
A(x)									

2) Tracer la courbe représentative de A.(papier millimétré fourni)

3) Valider votre réponse du II. 6.

Résultats sur les huit groupes

Je donne ici le nombre de groupes qui ont donné des réponses justes

Etape de conjecture :

- question 1 : 8/8
- question 2 : 7/8

Etape de démonstration :

- question 1 : 8/8
- question 2 a : 7/8
- question 2 b : 6/8
- question 3 : 5/8
- question 4 : 3/8
- question 5 a : 7/8
- question 5 b : 6/8
- question 6 : 6/8

Etape de vérification :

- question 1 : 6/8
- question 2 : 6/8
- question 3 : 4/8

Commentaire

La partie géométrique du problème n'a pas posé de difficultés particulières aux élèves. Seul le cas trivial AM = 0cm a soulevé quelques étonnements de la part de certains élèves. La première difficulté rencontrée est la construction du rectangle et plus précisément le placement des points M, N et P.

Lors de la partie algébrique les élèves ont eu des difficultés pour déterminer l'intervalle de définition et l'écriture de A(x) en fonction de x.

Par contre, la troisième phase était réussie par la majorité des groupes, grâce à la calculatrice graphique. La lecture graphique du maximum n’a pas posé de difficultés.

Le travail en groupe a des avantages et des inconvénients. Le fait que les élèves ont travaillé en groupe a donné une dynamique et a permis de surmonter quelques difficultés. Mais j’ai soulevé un point négatif à savoir : deux groupes ont partagé les tâches et n’ont pas traité dans l’ordre les questions posées.

Dans cette activité les élèves ont su s’approprier le problème du point de vue géométrique mais ce fut difficile pour la partie algébrique.

3) Expérimentation en classe de première STT

Expérimentation n°1

Contexte :

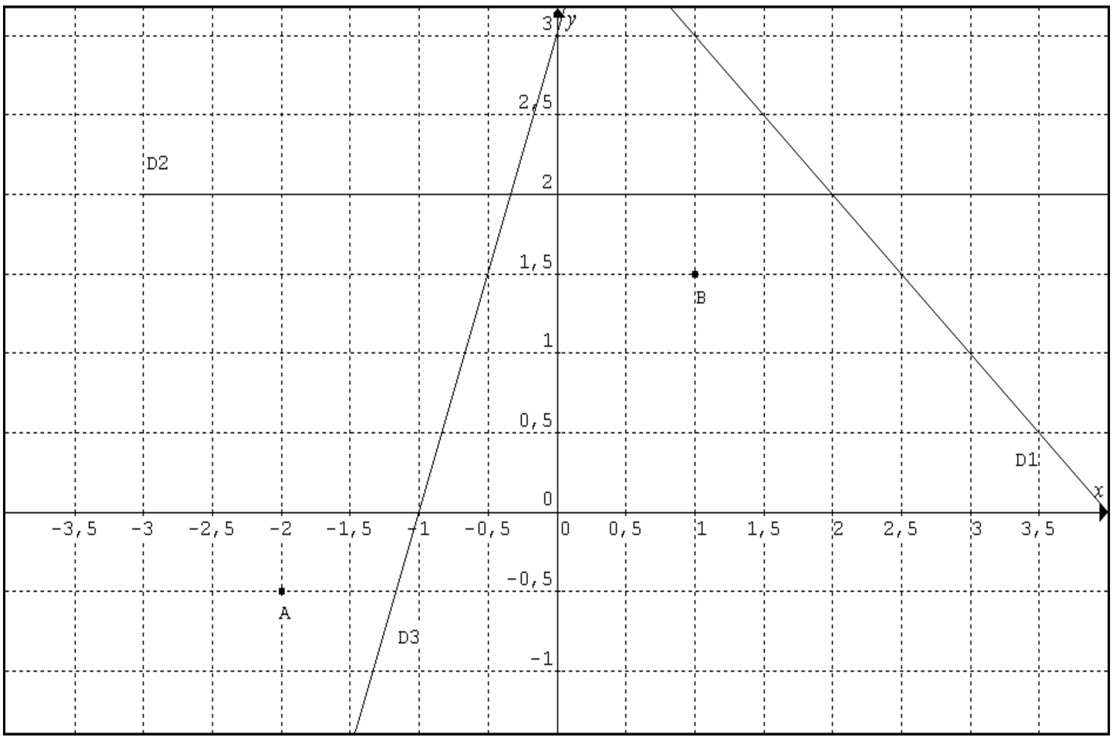
Cette activité que j'ai expérimentée dans ma classe de première STT est composée de deux exercices et a duré 30 minutes. Il s'agit d'un travail individuel que les élèves devaient me rendre. Les élèves ont travaillé sur la lecture graphique du coefficient directeur d'une droite, puis reconnaître une droite à partir de son coefficient directeur. La notion de coefficient directeur d'une droite et sa détermination par lecture graphique font parties du programme de la classe de seconde.

Activité 5

Exercice 1

1. Déterminer graphiquement le coefficient directeur des droites D1, D2 et D3 représentées dans le repère ci-dessous puis compléter le tableau suivant :

Droites	D1	D2	D3
Coefficient directeur			

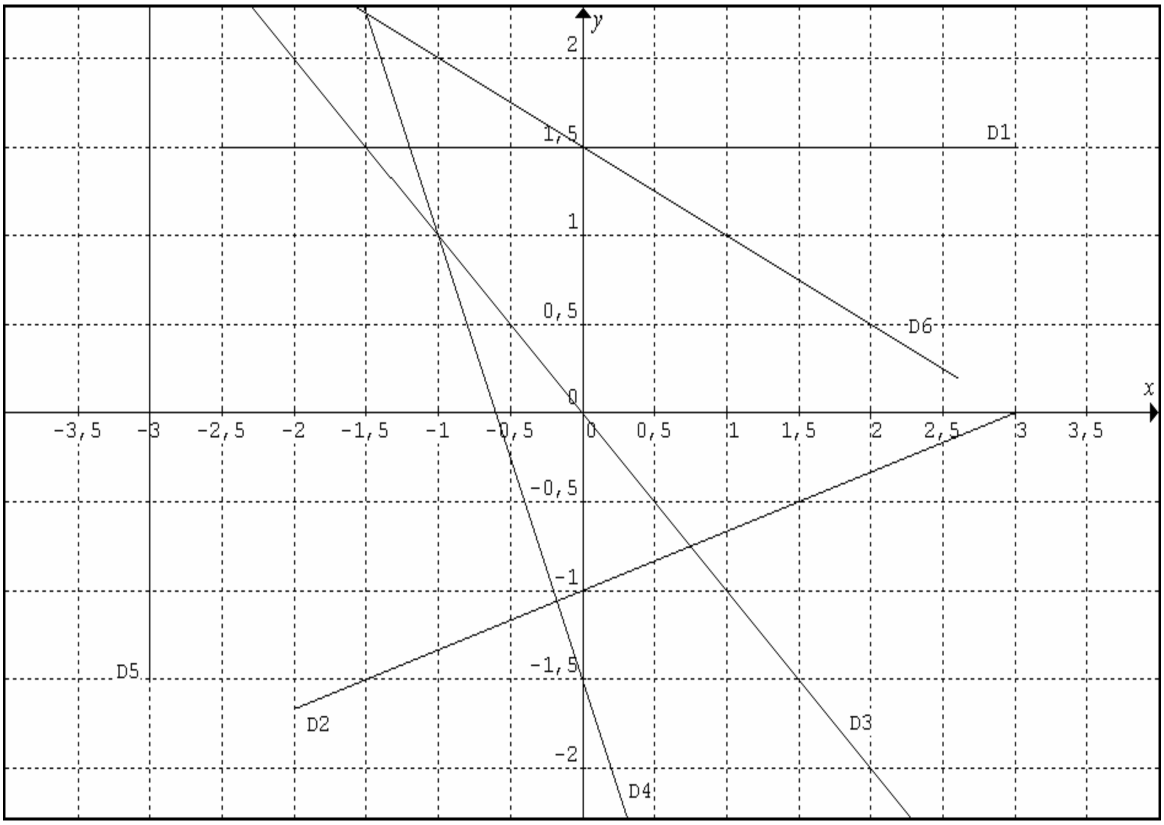


2. Déterminer par le calcul le coefficient directeur de la droite (AB)

Exercice 2

Voici quatre nombres : -1 ; 0 ; - 5/2 et 1/3. Chacun de ces nombres est le coefficient directeur d'une droite de la figure ci-dessous. Associer à chaque nombre une des droites en complétant le tableau suivant :

Coefficient directeur	-1	0	-5/2	1/3
Droite				



Présentation et objectif de l'activité:

Il s'agit d'un travail préparatoire sur le coefficient directeur d'une droite. Cette activité a été proposée dans le but de préparer le terrain à l'introduction du nombre dérivé (activité 6) et de la fonction dérivée (activité 7).

L'exercice 1

consiste à déterminer graphiquement ou par le calcul le coefficient directeur de trois droites données :

- question 1 : l'élève doit associer à chaque droite son coefficient directeur.
- question 2 : L'élève doit utiliser la formule $\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$ pour calculer le coefficient directeur de la droite (AB).

L'exercice 2

c'est le travail inverse qui est demandé : on donne quatre nombres réels et six droites représentées dans un repère. L'élève doit associer à chacun des quatre nombres réels donnés la droite dont il est le coefficient directeur.

Résultats :

Exercice 1

- question 1 : réponses justes : 21/31
  réponses fausses : 8/31
  pas de réponse : 2/31

- question 2 : réponse juste : 10/31 dont deux faites graphiquement et non pas par le calcul
  réponses fausses : 16/31
  pas de réponse : 5/31
  un seul élève a tenté de trouver l'équation réduite de la droite (AB)

Réponses proposées à la question 2 : (voir annexe)

- Je ne me souviens pas de la formule
- Coefficient directeur de (AB) est : $\frac{x_b - x_a}{y_b - y_a}$

Exercice2

réponses justes : 10/31

réponses partiellement justes : 6/31

réponses fausses : 11/31

pas de réponse : 4/31

Réponses proposées : (voir annexe)

- 0 est le coefficient directeur de la droite horizontale (D1) et de la droite verticale (D5)
- -5/2 est le coefficient directeur des droites (D4) et (D6)
- 1/3 est le coefficient directeur des droites (D4) et (D6)
- -1 est le coefficient directeur de la droite (D2)

Commentaire

Par rapport aux résultats obtenus dans cette activité, il me semble important de soulever quelques points :

Les deux exercices proposés ont fait travailler les élèves essentiellement sur le registre graphique. Ce registre semble bien adopté par les élèves et leur est familier. La question 1 de l'exercice 1 été bien réussie, les élèves ont su lire facilement le coefficient directeur des trois droites données, par contre un oubli ou une utilisation erronée de la formule était bien visible lors de la question 2. A propos de cette question, certains élèves ont tracé la droite (AB) puis ont lu graphiquement son coefficient directeur au lieu de le déterminer par le calcul conformément à l'énoncé.

On constate ici que les élèves restent prisonniers du registre qu'ils maîtrisent à savoir le registre de la lecture graphique et ne font pas d'effort à utiliser d'autres registres.

L'exercice 2 de cette activité a posé quelques difficultés à l'image des réponses proposées ci-Dessus. Par exemple, pour certains élèves le coefficient directeur d'une droite verticale est égale à zéro et un nombre négatif respectivement positif est le coefficient directeur de toute droite descendante respectivement montante.

Expérimentation n° 2

Contexte

Cette activité est venue après un travail préparatoire sur le coefficient directeur d'une droite (activité 1). Son intérêt était de montrer aux élèves une interprétation concrète du coefficient directeur d'une droite particulière à savoir la tangente à la courbe en un point donné. Cette activité a permis donc d'introduire le nombre dérivé d'une fonction en un point.

Activité 6

1) Construire, à l'aide de la calculatrice graphique, la représentation graphique (C) de la fonction définie par : $f(x) = x^2 - x - 2$ sur l'intervalle [-1 ; 3].
Sur le même graphique construire les droites suivantes :
D1 : $y = 3x + 1,5$ D2 : $y = x - 3$
Une de ces deux droites est la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Laquelle ?
....

2) On appelle nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse 1, noté f '(1), le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Que vaut f '(1) ?
....

Présentation de l'activité :

question 1 : l'utilisation de la calculatrice graphique permettait à l'élève de tracer la courbe de façon précise sur un intervalle bien défini. Toujours à l'aide de la calculatrice en traçant les droites D1 et D2 l'élève doit reconnaître la tangente à (C) au point d'abscisse 1 (la définition géométrique d'une tangente est rappelée oralement).
question 2 : une fois la tangente est clairement reconnue par l'élève, celui ci doit déterminer son coefficient directeur noté f '(1) qui est en fait le nombre dérivé de f au point d'abscisse 1.

Résultats :

- question 1 : réponses justes : 30/30
- question 2 : réponses justes : 21/30

  réponses fausses : 5/30

  pas de réponse : 4/30

Réponses proposées à la question 2 : (voir annexe)

- Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est 1 (11 élèves)
- f '(1) vaut 1 (5 élèves)
- Par lecture graphique on peut voir que f '(1) vaut 1 (5 élèves)
- f '(1) ~ 1 (1 élève)

commentaire :

Dans cette activité, la calculatrice graphique servait à tracer la représentation graphique de la fonction f ainsi que les droites D1 et D2 et permettait aux élèves de reconnaître la tangente à (C) au point d'abscisse 1. D'ailleurs la totalité des élèves ont répondu facilement à cette question.

Bien que les élèves savaient que « si une droite a pour équation réduite y = mx + p alors son coefficient directeur est égal à m », aucun d'entre eux n' a pensé à déduire le coefficient directeur de la tangente D1 à partir de son équation réduite y = x – 3. Par contre ils se sont servis de la calculatrice pour lire graphiquement son coefficient directeur avec le risque de lire une valeur approchée. D'ailleurs, un élève a répondu que f '(1) est à peut près égale à 1.

On peut en déduire que dès qu'une représentation graphique est présentée devant l'élève, celui-ci se plaçait automatiquement dans le registre de la lecture graphique pour répondre aux questions et n'apprêtait aucune attention au registre algébrique. On voit là l'incapacité des élèves à choisir le registre adéquat pour résoudre ses problèmes.

Une autre remarque qui a attiré toute mon attention : malgré la donnée de la définition du nombre dérivé, la majorité des élèves semble préférer retenir le nombre dérivé en tant que coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 1et non pas par sa notation f '(1). Ceci explique que toute nouvelle notation ou tout nouveau objet met du temps à s'imposer. Le registre langage naturel semble ici préféré au registre algébrique.

Expérimentation n° 3

L'expérimentation suivante est décrite de façon détaillé et selon le canevas proposé en GFD.

Activité 7

On considère la représentation graphique (C) de la fonction carré définie par $f(x) = x^2$ sur l'intervalle [-2 ; 2] ci-dessous.

Les droites D1, D2, D3, D4, D5, D6 et D7 sont respectivement les tangentes à la courbe (C) aux points d'abscisses respectives 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; - 0,5 ; - 1 et - 2.

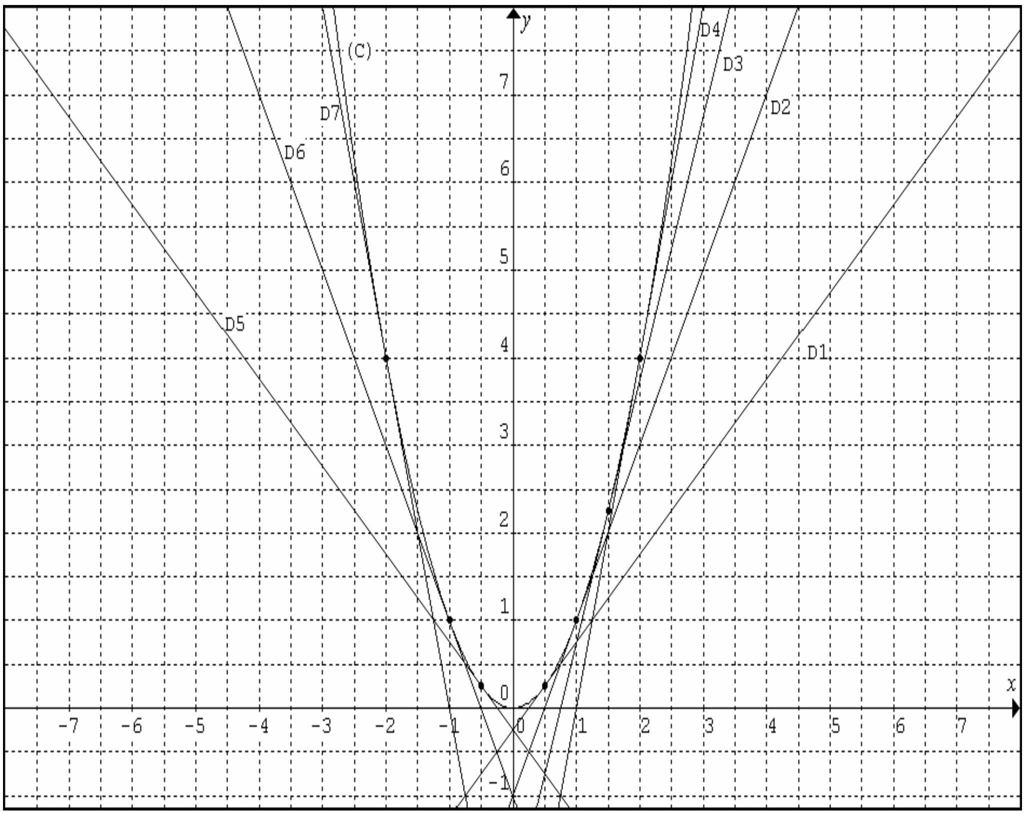
1. A l'aide d'une lecture graphique, compléter le tableau suivant :

x	0,5	1	1,5	2	- 0,5	- 1	-2
f '(x)							

2 a. Quel procédé de calcul permet d'obtenir les nombres de la deuxième ligne du tableau à partir de ceux de la première

b. Traduisez algébriquement la réponse précédente en écrivant f '(x) en fonction de x

2) Déterminer par le calcul les nombres dérivés f '(- 1,5) et f '(1,75) puis tracer les tangentes à la courbe (C) aux points d'abscisses -1,5 et 1,75.



Le contexte de l'étude

Cette activité s'est déroulée dans ma classe de première STT, constituée de 32 élèves de niveaux différents et de degrés de motivation très variés. Seuls 28 élèves étaient présents.
La séance s'est déroulée en demis groupes. C'est un travail individuel qui est demandé sans aucune aide de ma part.

Les objectifs

Il s'agit d'une activité d'introduction de la fonction dérivée de la fonction carrée. Cette séance vient après un travail préparatoire sur le coefficient directeur d'une droite et sur le nombre dérivé en un nombre réel **a** introduit comme coefficient directeur de la tangente au point de la courbe d'abscisse a.

Les matériaux du travail de l'élève

Chaque élève dispose d'une fiche d'énoncé à trous intitulée activité 3 (ci-dessus) et de sa calculatrice. Les consignes sont données à l'oral.

L'organisation mathématique de la séance

Place dans la progression

3. Fonction et lecture graphique
4. Résolution graphique d'équations et d'inéquations
5. Registre graphique et fonctions de référence (affine, carrée, inverse, cube et racine carrée)
6. Equation du second degré
7. Détermination du coefficient directeur d'une droite graphiquement et par le calcul
8. Tangente et nombre dérivé

Pré-requis nécessaires

Les élèves sont supposés savoir :

- Lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite,
- Déterminer par le calcul le coefficient directeur d'une droite, connaissant deux points

distincts A et B de cette droite, en utilisant la formule :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- Si une droite a pour équation réduite y = mx + p alors son coefficient directeur est égal à m.

- Le nombre dérivé en un nombre réel a est le coefficient directeur de la tangente au point de la courbe d'abscisse **a**.

Présentation de l'activité

- la question **1.** permettait à l'élève de pratiquer encore une fois la lecture graphique du coefficient directeur des tangentes et de réinvestir la définition du nombre dérivé en un point donné a comme étant le coefficient directeur de la tangente au point de la courbe d'abscisse a.
- la question **2a.** permet à l'élève de savoir déduire, des données d'un tableau, le procédé de calcul permettant d'obtenir les nombres de la deuxième ligne du tableau à partir de ceux de la première. Il devait formuler sa réponse en langage naturel et non pas algébrique, c'est à dire sans utiliser la lettre x.
- la question **2b.** permet à l'élève de distinguer le registre du langage naturel et celui du langage algébrique.
- la question **3.** est posée de manière à mettre la puce à l'oreille de l'élève sur la possibilité de tracer la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse **a** à partir de son coefficient directeur f '(a) calculé à l'aide de la formule f '(a) = 2a.

C'est le passage du registre algébrique au registre graphique qui était visé dans cette question.

Résultats :

- question 1 : réponses justes : 20/28
  réponses partiellement justes : 8/28
- question 2 a : réponses justes : 15/28
  réponses fausses : 11/28
  pas de réponse : 2

- question 2 b : réponses justes : 22/28

réponses fausses : 5/28

pas de réponse : 1

- question 3 : réponses justes : 14/28

réponses fausses : 3/28

pas de réponse : 11/28

Réponses proposées : (voir annexe)

- Pour obtenir les nombres de la deuxième ligne du tableau à partir de ceux de la première on effectue : 1x + x = f '(x)
- Le calcul qui permet d'obtenir les nombres de la deuxième ligne du tableau à partir de ceux de la première c'est 2x
- Il faut faire 2x pour obtenir la ligne f '(x)
- On se place sur un point, on décale sur la droite d'une unité et on descend pour les droites D5, D6 et D7 par contre on monte pour D1, D2, D3 et D4.

Commentaire :

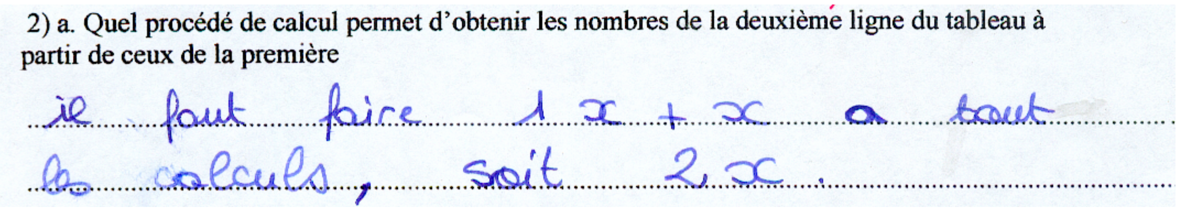
Par rapport aux résultats obtenus dans cette activité le registre graphique semble encore une fois accessible aux élèves. Les différentes questions ont fait travailler les élèves essentiellement sur trois registres : le registre graphique, le registre algébrique et le registre du langage naturel. Ce dernier registre ne semble pas trop pratiqué par les élèves, et par peur de fautes d'orthographe il est vite associé au registre algébrique à l'image des réponses proposées à la question2.a. D'ailleurs certains élèves donnent la même réponse aux questions 2.a et 2.b. La question 3 a posé quelques difficultés aux élèves, certains parmi eux n'ont pas pensé à utiliser la forme algébrique f '(x) = 2x pour calculer les nombres dérivés f '(-1,5) et f '(1,75) pour pouvoir tracer les tangentes à la courbe (C) aux points d'abscisses -1,5 et 1,75.
Les élèves ont tracé intuitivement les tangentes aux points demandés. On souligne ici la difficulté des élèves à choisir le registre le mieux adapté pour répondre à sa question ce qui semble compréhensible ici parce que la notion de fonction dérivée n'a pas encore acquis son statut d'objet pour qu'à son tour devient un outil pour l'élève.

Conclusion

Nous avons vu comment le concept de fonction pouvait évoluer de la classe de seconde à la classe de première STT. Après s'être documenté, nous avons pensé qu'il était judicieux dans un premier temps d'utiliser de façon implicite l'outil fonction à l'image de l'activité 1. Dans un second temps, nous avons traité en classe le registre graphique (lecture d'images, d'antécédents et des zéros d'équations…). Nous avons ensuite essayé de donner du sens à la définition d'une fonction dans le registre algébrique à l'image de l'activité 3 où on s'appuie à la fois sur les registres graphique et numérique. Après avoir défini l'objet fonction, nous l'avons utilisé explicitement pour la résolution des problèmes comme dans l'activité 4 (partie II).

Avec le recul, il semble que l'ordre dans lequel les deux premières activités sont présentées pouvait être modifié de la façon suivante : d'abord, il s'agit de faire le lien avec la classe de troisième en commençant par l'activité 2 suivie par le cours sur les fonctions affines. On peut ensuite continuer par l'activité 1 car l'exemple du graphique obtenu dans celle-ci peut motiver le cours sur les fonctions en montrant bien l'existence de fonctions qui ne sont pas des fonctions affines. Beaucoup d'élèves ont oublié ce qu'ils avaient fait en classe de troisième donc il semble intéressant de commencer par une partie du cours avec laquelle ils ont déjà été familiarisés. Ceci pour arriver à leur parler de l'objet fonction dans toute sa généralité (en s'appuyant sur le registre graphique) : on arrive ainsi progressivement à un plus haut degré d'abstraction.

De façon générale, nous avons été surpris par les grandes difficultés des élèves au niveau de la langue naturelle. Ces difficultés se sont manifestées dans toutes nos expérimentations. Par exemple, il n'est pas rare de voir un élève demander si ce qu'il a écrit est du français. Réciproquement, certains élèves se demandent trop souvent si les énoncés sont écrits en français. A l'heure où beaucoup d'élèves abandonnent dès qu'ils rencontrent une difficulté, le langage mathématique ne peut se permettre d'être une barrière à leur apprentissage. Comment comprendre un langage qui n'a aucun sens ? Dans cette optique, il nous semble intéressant de proposer aux élèves des activités visant à montrer aux élèves que les termes employés en mathématiques pouvaient avoir un sens (tout relatif et sur un exemple concret : voir annexes). Là encore, le registre graphique qui est si familier aux élèves par l'intermédiaire d'autres matières (SES, histoire et géographie) permet de donner du sens à l'objet fonction et à tout le vocabulaire qui l'accompagne. En classe de Première STT, un autre exemple frappant est celui de certains élèves qui donnent des réponses du type : «


2) a. Quel procédé de calcul permet d'obtenir les nombres de la deuxième ligne du tableau à partir de ceux de la première

il faut faire 1x + x a tout les calculs, soit 2x.

»

à une question demandant explicitement une réponse formulée en langue naturelle.

Toujours en classe de Première STT, le registre graphique a permis de donner du sens à la notion de nombre dérivé. Ce registre a le double avantage d'être bien accueilli par les élèves et d'être si accessible que les élèves n'hésitent pas à l'utiliser. Par exemple, la définition d'une suite numérique comme étant une fonction de ¥ dans ¡ a amené une élève à poser la question suivante : « comment représenter graphiquement une suite ? ». On voit ainsi que le registre graphique peut aider les élèves à apporter du sens à un objet mathématique nouvellement introduit et certains élèves le font naturellement car ce registre leur est familier. En tout cas, il permet d'éviter le blocage de certains élèves envers les définitions qui leur paraissent abstraites. Le nouvel objet est alors accepté.

Bibliographie

[1] DUVAL Raymond : Registre des représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et des sciences cognitives, 1993 p. 365. IREM de Strasbourg.

[2] DOUADY Régine, Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques, Revue RDM n° 7-2, 1986, La pensée sauvage, Grenoble.

[3] Groupement national D'équipe de recherche en didactique des mathématiques : algèbre et fonctions, 1997.

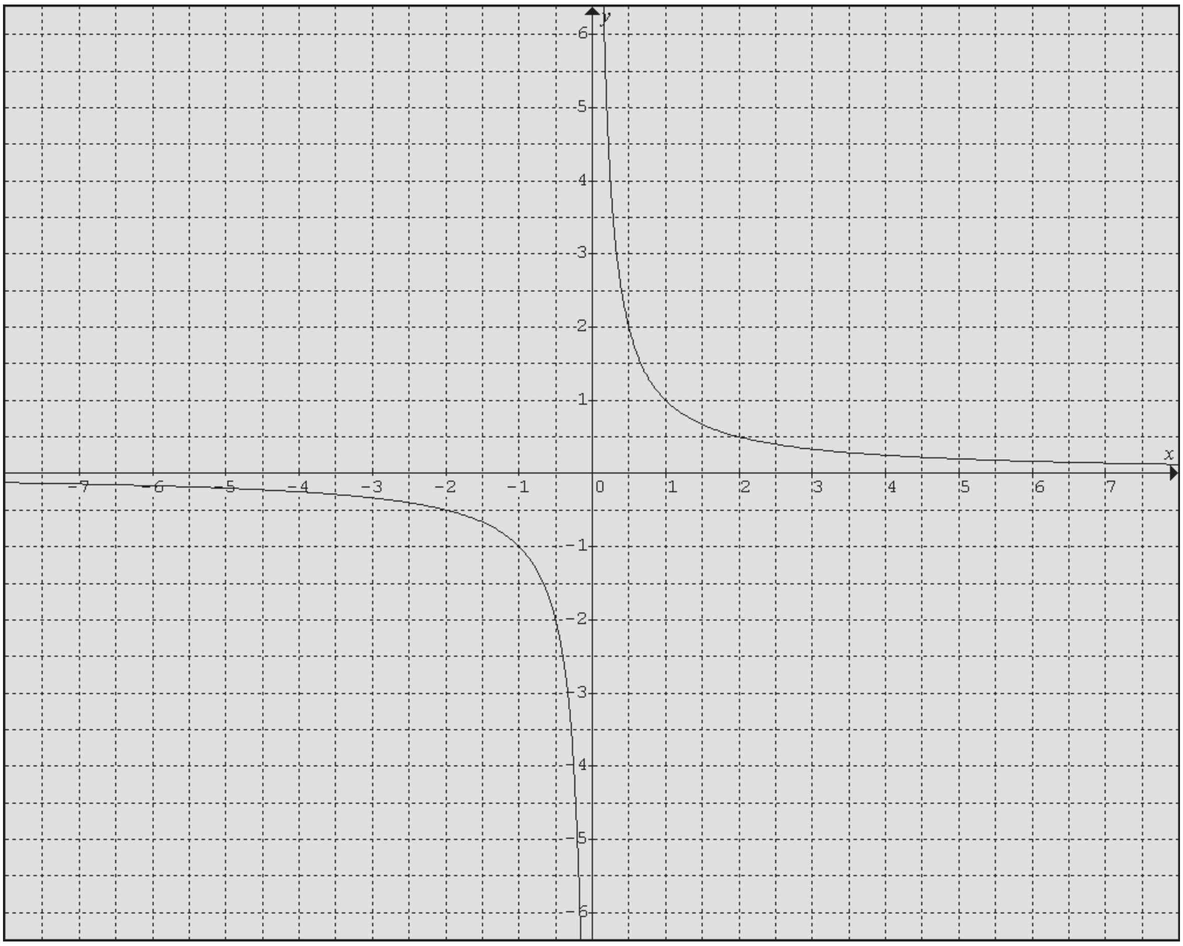
Annexes

Expérimentations en classe de seconde

Activité 3

Courbe numéro 2

On suppose que la figure suivante donne la courbe représentative d'une fonction f.



Question 1 : En effectuant une lecture graphique, remplir le tableau suivant :

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
f(x)										

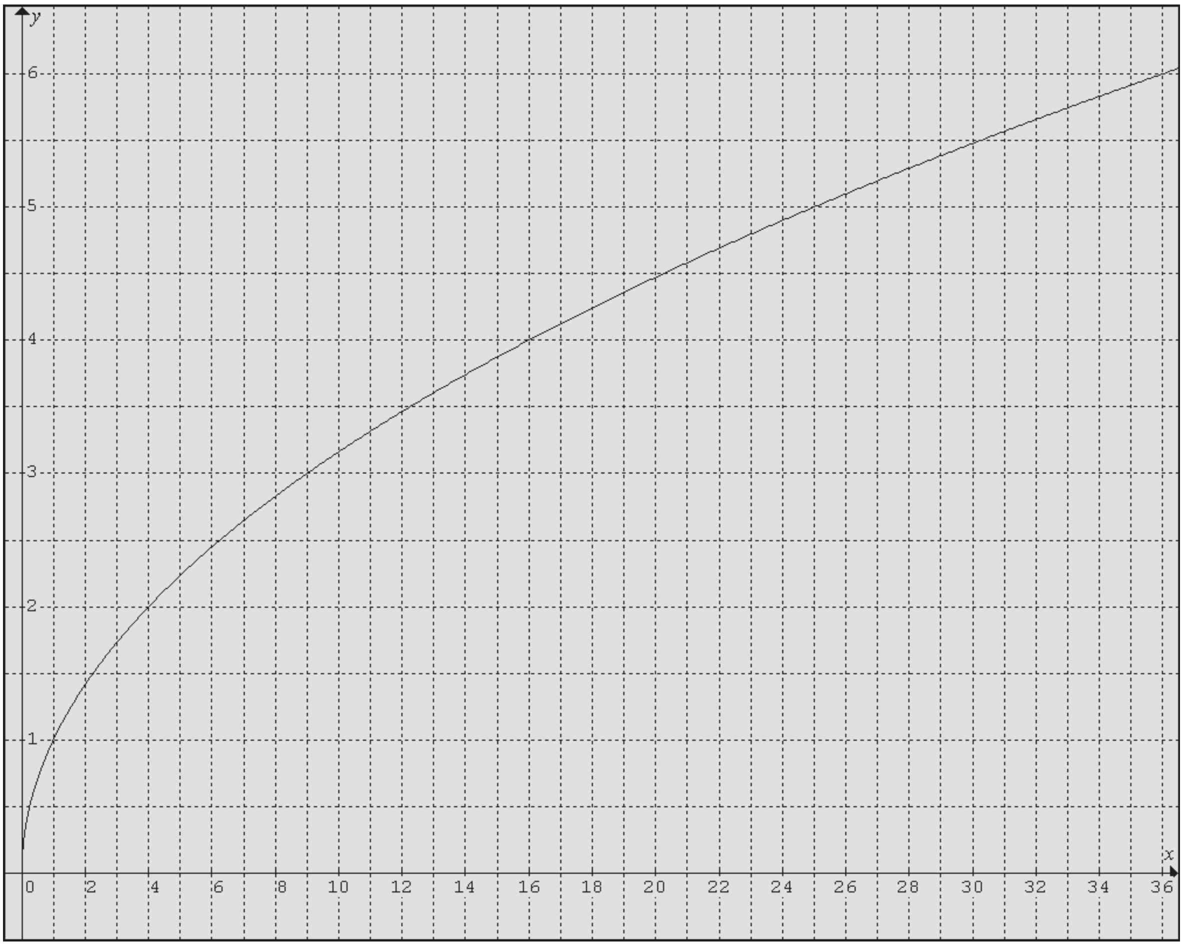
Question 2 : Par quel procédé passe-t-on d'un nombre de la première ligne au nombre de la deuxième ligne de la même colonne ? L'expliquer avec vos mots sans utiliser la lettre x.

Question 3 : En vous aidant de la réponse à la question précédente, donner la formule (algébrique) qui semble permettre de calculer l'image d'un nombre x (non nul) par la fonction f.

uestion 4 : Donner les images des nombres 3, $\frac{1}{3}$ et 100 par la fonction f en indiquant la (ou les) méthodes utilisées.

Courbe numéro 3

On suppose que la figure suivante donne la courbe représentative d'une fonction f.



Question 1 : En effectuant une lecture graphique, remplir le tableau suivant :

x	0	1	4	9	16	25	36
f(x)							

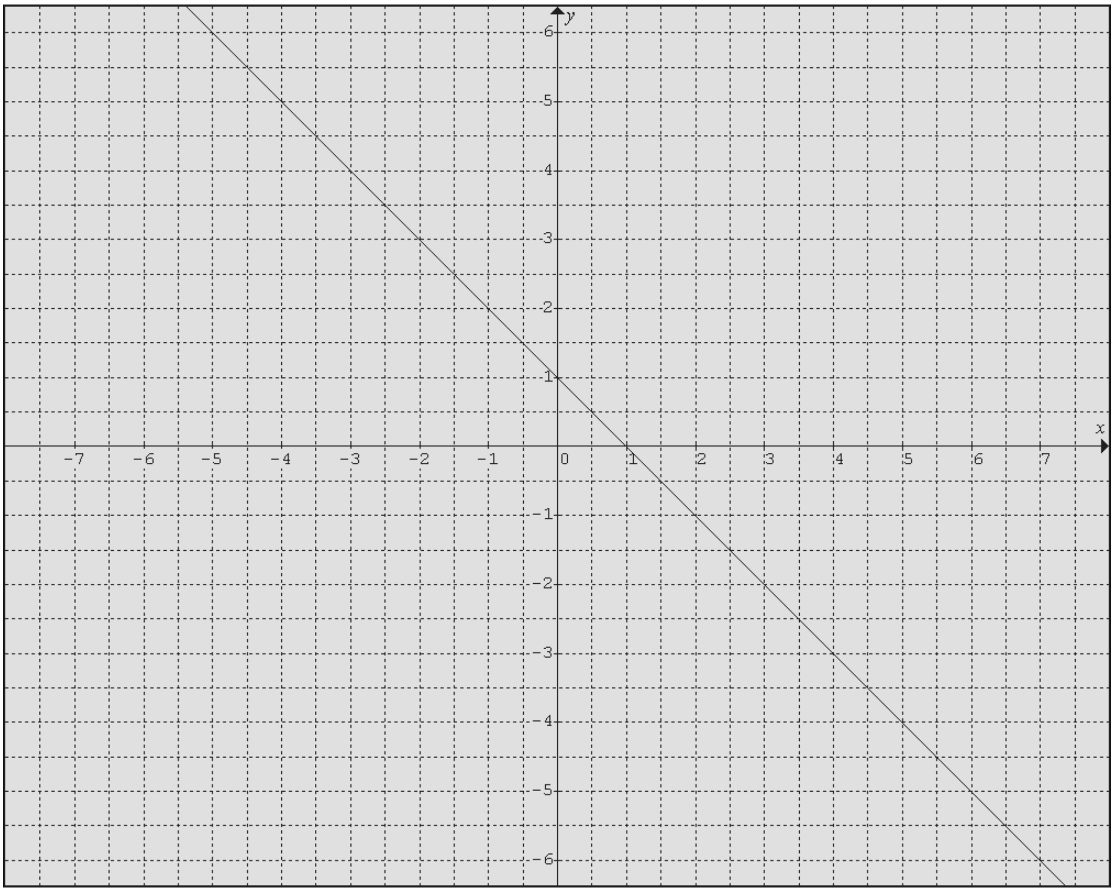
Question 2 : Par quel procédé passe-t-on d'un nombre de la première ligne au nombre de la deuxième ligne de la même colonne ? L'expliquer avec vos mots sans utiliser de formule contenant la lettre x.

Question 3 : En vous aidant de la réponse à la question précédente, donner la formule (algébrique) qui semble permettre de calculer l'image d'un nombre positif x par la fonction f.

Question 4 : Donner les images des nombres 2 et 100 par la fonction f en indiquant la (ou les) méthodes utilisées.

Courbe numéro 4

On suppose que la figure suivante donne la courbe représentative d'une fonction f.



Question 1 : En effectuant une lecture graphique, remplir le tableau suivant :

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
f(x)									

Question 2 : Par quel procédé passe-t-on d'un nombre de la première ligne au nombre de la deuxième ligne de la même colonne ? L'expliquer avec vos mots sans utiliser de formule contenant la lettre x.

Question 3 : En vous aidant de la réponse à la question précédente, donner la formule (algébrique) qui semble permettre de calculer l'image d'un nombre x par la fonction f.

Question 4 : Donner les images des nombres $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ et 100 par la fonction f en indiquant la (ou les) méthodes utilisées.

Expérimentations en classe de première STT (quelques réponses d'élèves)

Activité 5

Exercice 1

1. Déterminer graphiquement le coefficient directeur des droites D1, D2 et D3 représentées dans le repère ci-contre puis compléter le tableau suivant :

Droites	D1	D2	D3
Coefficient directeur	-1	0	$\frac{1}{2}$

2. Déterminer par le calcul le coefficient directeur de la Droite (AB)

$y = ax + b$ $\left(b = \frac{0,5}{2,5} = 0,2\right)$

$y = ax + 0,2$ donc $b = 0,2$.

2. Déterminer par le calcul le coefficient directeur de la Droite (AB)

$A = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{(1 - (1,5))}{-2 - (2,5)} = \frac{0,5}{0,5} = 1$

le coefficient de la droite (AB) est égale à 1

2. Déterminer par le calcul le coefficient directeur de la Droite (AB)

je ne me souvien pas de la formule

2. Déterminer par le calcul le coefficient directeur de la Droite (AB)

$\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$

Je ne sais pas.

j'ai la formule mais je ne sais pas l'appliquer.

2. Déterminer par le calcul le coefficient directeur de la Droite (AB)

je ne me souvien pas de la

2. Déterminer par le calcul le coefficient directeur de la Droite (AB)

$\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{-1 + 1,5}{-2 + 2,5} = \frac{2,5}{0,5} = 5$

Exercice 2

Voici quatre nombres : -1 ; 0 ; - 5/2 et 1/3.
Chacun de ces nombres est le coefficient directeur d'une droite de la figure ci-contre.
Associer à chaque nombre une des droites en complétant le tableau suivant :

Coefficient directeur	-1	0	- 5/2	1/3
droite	D3	D1;D5	D4;D6	D2

Exercice 2

Voici quatre nombres : -1 ; 0 ; - 5/2 et 1/3.
Chacun de ces nombres est le coefficient directeur d'une droite de la figure ci-contre.
Associer à chaque nombre une des droites en complétant le tableau suivant :

Coefficient directeur	-1	0	- 5/2	1/3
droite	D3	D1; D5	D4 ; D6	D2

Activité 6

Exercice 1

1) Construire, à l'aide de la calculatrice graphique, la représentation graphique de la fonction définie par
$f(x) = x^2 - x - 2$ sur l'intervalle [-1 ; 3]. On appelle (C) la représentation graphique de f.
1) Sur le même graphique construire les droites suivantes :
D1 : y = 3x + 1,5 D2 : y = x – 3
Une de ces deux droites est la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Laquelle ?
la droite qui est la tangente à (c) au point d'abscisse 1 est la droite D2

4) On appelle nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse 1, noté f '(1), le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Que vaut f '(1) ?
par lecture graphique on peut voir que f'(1) ~~est égal~~ vaut 1 car on se déplace d'une unité à droite puis on monte d'1 unité

Exercice 1

1) Construire, à l'aide de la calculatrice graphique, la représentation graphique de la fonction définie par
$f(x) = x^2 - x - 2$ sur l'intervalle [-1 ; 3]. On appelle (C) la représentation graphique de f.
1) Sur le même graphique construire les droites suivantes :
D1 : y = 3x + 1,5 D2 : y = x – 3
Une de ces deux droites est la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Laquelle ?
C'est la droite D2 : y = x – 3 car elle frôle la courbe f(x)

4) On appelle nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse 1, noté f '(1), le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Que vaut f '(1) ?
Je lis graphiquement $\simeq 1$

Exercice 1

1) Construire, à l'aide de la calculatrice graphique, la représentation graphique de la fonction définie par
$f(x) = x^2 - x - 2$ sur l'intervalle [-1 ; 3]. On appelle (C) la représentation graphique de f.
1) Sur le même graphique construire les droites suivantes :
D1 : y = 3x + 1,5 D2 : y = x – 3
Une de ces deux droites est la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Laquelle ?
la droite D2 est la tangente au point d'abscisse 1

4) On appelle nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse 1, noté f '(1), le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Que vaut f '(1) ?
je lis graphiquement que f'(1) = 1

Exercice 1

1) Construire, à l'aide de la calculatrice graphique, la représentation graphique de la fonction définie par
$f(x) = x^2 - x - 2$ sur l'intervalle [-1 ; 3]. On appelle (C) la représentation graphique de f.

1) Sur le même graphique construire les droites suivantes :

D1 : $y = 3x + 1{,}5$ D2 : $y = x - 3$

Une de ces deux droites est la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Laquelle ?

C'est D2 : $y = x - 3$ qui est la tangente à (C) au point d'abscisse 1 car elle frôle la courbe $f(x) = x^2 - x - 2$

4) On appelle nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse 1, noté f '(1), le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Que vaut f '(1) ?

le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est egale à 1.

Activité 7

2) a. Quel procédé de calcul permet d'obtenir les nombres de la deuxième ligne du tableau à partir de ceux de la première

il faut faire $1x + x$ a tout les calculs, soit $2x$.

2) a. Quel procédé de calcul permet d'obtenir les nombres de la deuxième ligne du tableau à partir de ceux de la première

pour obtenir les nbres de la 2ème ligne du tableau a partir de ceux de la premiere on effectue : $1x + x = f'(x)$

b. Traduisez algébriquement la réponse précédente en écrivant f '(x) en fonction de x

$f'(x) = 2x$

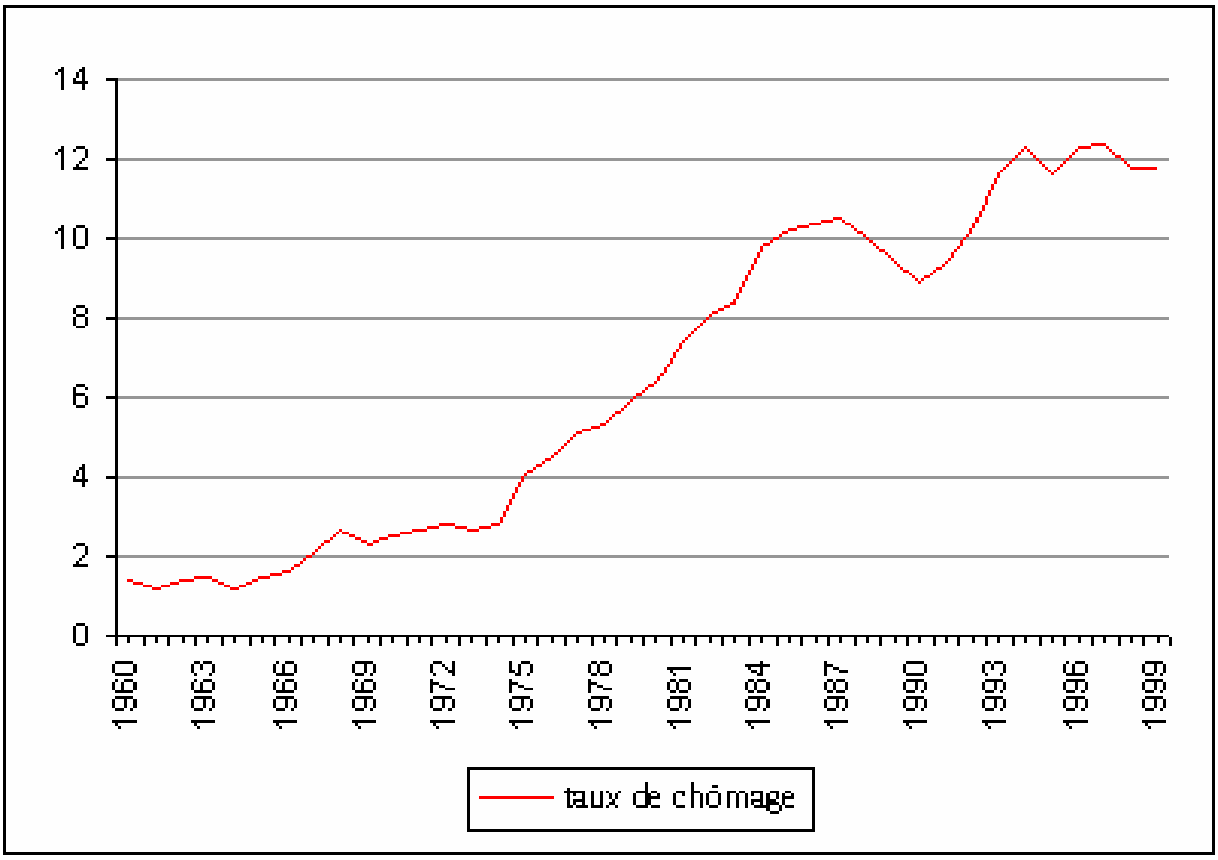
2) a. Quel procédé de calcul permet d'obtenir les nombres de la deuxième ligne du tableau à partir de ceux de la première

On peut voir aproximativement qu'il faut multiplier x par 2 pour trouver $f'(x)$

2) a. Quel procédé de calcul permet d'obtenir les nombres de la deuxième ligne du tableau à partir de ceux de la première

il faut faire $2x$ pour obtenir la colonne $f'(x)$

Travail possible sur le registre verbal



<u>Attention :</u> on convient que la courbe ci-dessous représente une fonction qui est définie pour tous les nombres réels compris entre1960 et 1999.

Langage usuel	**Langage mathématique**
Quel était le taux de chômage en 1975 ?	
	Quel est l'antécédent du nombre 7 ?
	Quel est l'antécédent du nombre 14 ?
Combien y a t-il eu d'années durant lesquelles le taux de chômage était de 10% ? Lesquelles ?	

<u>Questions subsidiaires :</u>

Que remarquez-vous à propos du taux de chômage entre 1976 et 1985 ?entre 1988 et 1990 ?

Quel semble être le plus haut taux de chômage entre 1966 et 1999? On appelle ce taux : le taux de chômage maximal entre 1966 et 1999 ?