Quelques modèles d'évolution de populations

Equations différentielles – Fonctions exponentielles – Suites numériques – Tableur et TICE

> *« Ce qui est simple est faux.*
> *Ce qui est compliqué est inutilisable. »*
> *Paul Valéry*

I] Le modèle de Malthus : la croissance exponentielle

Thomas Robert Malthus (1766 –1834) est un pasteur anglican et un économiste. En cette toute fin du XVIII^{e} siècle, des réformateurs accusent le gouvernement anglais de W. Pitt d'être responsable de l'extrême pauvreté d'un très grand nombre de familles anglaises. Malthus se demande si des lois naturelles et inéluctables n'en seraient pas la cause.

Il se pose alors deux questions :

- quel serait l'accroissement naturel de la population si elle était abandonnée à elle-même sans aucune gêne
- quelle pourrait être l'augmentation du produit de la terre.

Evolution de la population :

Pour lui, l'hypothèse basse est le doublement de la population tous les 25 ans.
On a donc une suite géométrique de raison 2.

Evolution des ressources naturelles

En revanche, il considère que si la capacité de production peut doubler dans les premiers 25 ans, elle augmente ensuite, pendant chaque période de 25 ans, au maximum de la production initiale.
On a donc une suite arithmétique dont la raison est le premier terme.

Malthus préconise donc que les familles pauvres dans leur propre intérêt limitent volontairement le nombre de naissances.

Dès le début du XIXe siècle ce modèle fut contesté. Par Marx bien sûr pour qui les problèmes venaient de la répartition des richesses mais aussi par Pierre-François Verhulst (1804-1849) qui s'est intéressé aux statistiques sociales et propose un autre modèle appelé le modèle logistique

Pour Malthus, sur une période prise pour unité de temps la population est modélisée par une suite géométrique :
$$\mathbf{P_{n+1} = k\, P_n.}$$

Dans ce cas l'accroissement relatif de la population par unité de temps est constant :

$$\frac{\mathbf{P_{n+1} - P_n}}{\mathbf{P_n}} = \mathbf{a}$$

a est le taux d'accroissement « naturel »

Pour passer au cas continu, il suffit de considérer que l'on travaille, non pas avec un pas de temps égal à 1, mais à Δt.

On écrit que $\mathrm{P_{n+1}} - \mathrm{P_n} = \frac{\mathrm{P_{n+1}} - \mathrm{P_n}}{1}$ que l'on remplace par $\frac{P(t+\Delta t) - \mathrm{P(t)}}{\Delta t}$

La formule devient donc : $\frac{P(t+\Delta t) - \mathrm{P(t)}}{\mathrm{P(t)}\Delta t} = \mathbf{a}$ **[I]**

Pour résumer Malthus :

Hypothèse : le taux d'accroissement rapporté à l'unité est constant.

Hypothèse

Cas discret → relation de récurrence → suite géométrique

$P_{n+1} = kP_n$ $\quad\quad$ $P_n = P_0 k^n$

Cas continu → équation différentielle → fonction

$P' = aP$ $\quad\quad$ $P(t) = P_0 e^{at}$

$\boxed{k=a+1}$

II]Le modèle de Verhulst : la loi logistique

Pierre François Verhulst (27 octobre 1804 – 15 février 1849, Bruxelles) est un mathématicien belge.

Verhulst considère que si la population peut se développer sans contrainte conformément au modèle de Malthus pendant une courte période d' "explosion démographique", les ressources n'étant pas inépuisables, la croissance de la population sera ensuite **freinée et limitée**.

Il faut donc introduire un **facteur de freinage**. L'accroissement relatif de la population par unité de temps ne doit donc plus être constant mais doit être une fonction décroissante de la population. Autant prendre la fonction décroissante la plus simple possible : une fonction affine.

Le modèle logistique repose donc sur l'hypothèse suivante énoncée par Verhulst :

L'accroissement relatif de la population par unité de temps est une fonction affine décroissante de la population.

$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = a\left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$ [II] où **a** est le taux d'accroissement de Malthus, précédemment évoqué.

Verhulst procède bien sûr à des vérifications statistiques à partir de données démographiques dont il dispose à l'époque. Il utilise ensuite ce modèle pour effectuer des prévisions. Ainsi en 1837, il prévoit qu'en1930 il y aura 40 millions de Français. On peut a posteriori apprécier cette prévision : en 1931, les Français étaient au nombre de 41,5 millions.

En fait ce modèle était validé par **Pearl,** vers 1920, pour une population animale dans un espace clos et un environnement constant

La grande histoire de la suite logistique $x_{n+1} = k\, x_n\, (1 - x_n)$ (histoire des sciences = épistémologie)

En 1840, Pierre Verhulst propose le modèle de la suite logistique

1908, le mathématicien Henri Poincaré, étudiant le problème astronomique des trois corps, met en évidence l'imprévisibilité à long terme des systèmes très sensibles aux conditions initiales.

1950-1965, Kolmogorv, Arnold et Moser découvrent une quasi-périodicité dans le problème des n corps (n corps (n solides en interaction gravitationelle).

1960 Le mathématicien Stephen Male découvre des phénomènes quasi-périodiques et chaotiques dans les sytèmes dynamiques. Cette même année, le météorologiste Edward Lorenz (décédé en 2008), lançant un même calcul une deuxième fois sur un ordinateur, s'aperçoit que les résultats diffèrent totalement. Il découvre en fait que les résultats de Poincaré s'appliquent aussi aux prévisions météorolgiques, c'est l'effet papillon.

1970 Le mathématicien James Yorke et le biologiste Robert May montrent que certaines populations évoluent selon la suite logistique et mettent en évidence les bifurcations et le doublement des périodes pour certaines valeurs du paramètre k.

1974-1975 : Michel Feigenbaum, mathématicien, chercheur à Los Alamos (Nouveau-Mexique), étudie la suite logistique avec une calculatrice de poche (HP-65) et constate que la suite des valeurs de k pour lesquelles on constate les bifurcations et les doublements de période $k=3<k_1<k_2<k_3\ldots$ est relativement régulière, puisque les écarts ($k_{n+1}-k_n$) forment une suite presque géométrique au sens suivant :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}-k_n}{k_{n+2}-k_{n+1}} = R \text{ avec } R \approx 4{,}669$$

Lorsque k dépasse une valeur limite, la suite est chaotique. Il y a mieux : ce phénomène a lieu avec n'importe quelle fonction présentant une « bosse », avec la même valeur de R (constante de Feigenbaum).
Avant, le chaos était synonyme de désordre. Feigenbaum découvrait un ordre commun à tous les phénomènes chaotiques. La science du chaos était née.

James Gleick, La théorie du chaos – Paris, Champs-Flammarion

Un peu de philo….

« Modéliser, ou faire une modélisation, c'est à partir d'un modèle, trouver les expressions mathématiques qui représentent schématiquement et analogiquement un processus phénoménal.

La phase de choix d'une modélisation est à proprement parler une mathématisation. Mais la modélisation n'est pas la simple traduction des données d'une discipline en un autre langage. Elle requiert les mathématiques pour figer le modèle en ce sens qu'on ne puisse plus subrepticement faire appel à des propriétés qui seraient ajoutées au modèle ainsi pris comme point de vue. Les mathématiques sont alors un outils épistémologique.

Deux mouvements sont possibles. Ou bien, on peut aller de la modélisation adoptée sur le modèle vers le réel, avec des moyens prédictifs, mathématiques et calculatoires, permettant d'anticiper des événements ou des situations, comme prévoir le moment de retour d'une comète, mais aussi le temps météorologique, évaluer le comportement des actifs financiers, prévoir le développement des épidémies, ou le déroulement d'une catastrophe comme un ouragan. Des variables connues, "explicatives", sont utilisées pour déterminer des variables inconnues, dites "à expliquer" : en ce cas, le réel confirme le point de vue du modèle selon la forme qu'a adoptée la modélisation. Ou bien, on peut aller du réel vers la modélisation puis vers le modèle, à partir de moyens descriptifs, ce qui permet de repésenter des données historiques rendant compte d'une masse d'informations. »

Angèle Kremer-Marietti - L'Epistémologie état des lieux et positions, p. 11-12