Quelques modèles d'évolution de populations

I] Le modèle de Malthus : la croissance exponentielle

Le modèle discret

1) Exprimer k en fonction de a
2) En supposant que la population augmente de 10% par unité de temps et que la population initiale soit de 1000 individus, exprimer P_n, la population après n unités de temps, en milliers d'individus, en fonction de n.

Le passage du modèle discret au modèle continu

1) En passant à la limite et en faisant intervenir la notation différentielle, obtenir l'équation différentielle $\frac{dP}{dt} = aP$ à partir de [I].
2) Que représente $\frac{dP}{dt}$? Faire une phrase traduisant l'équation différentielle précédente.

Le modèle continu

Quelle est la solution générale P(t) de l'équation P'=aP ? Que devient cette solution avec les mêmes hypothèses que dans le cas discret ?

Autour des deux modèles

1) Quel est l'inconvénient majeur de la modélisation de Malthus ?
2) En supposant que les unités de temps soient identiques dans les deux modèles, comparer les résultats obtenus après 10 unités de temps.
3) Cette modélisation peut-elle s'adapter à la décroissance d'une population ? Quelles conditions doivent vérifier a et k dans ce cas ?
4) Que se passe-t-il dans chacun des cas si a=0 ?
5) Visualisation et comparaison des deux modèles avec **Geogebra**

II] Le modèle de Verhulst : la loi logistique

Le modèle discret

1) Si la suite (Pn) converge, que peut-on dire de l'accroissement relatif lorsque n tend vers l'infini ? En supposant effectivement que la suite (Pn) converge vers 10, quelle valeur de K obtient-on ?

2) On se placera, pour simplifier le reste de l'étude, avec cette valeur de K, la valeur précédente de **a** du modèle de Malthus et la même population initiale. Ecrire [II] dans ce cas particulier.

Le modèle continu (le 4 est à faire à la maison)

1) De la même façon que pour le modèle de Malthus passer du modèle discret au modèle continu.

2) Interpréter les cas où la population initiale est inférieure à 10 milliers d'individus, où elle est supérieure, puis égale à 10 milliers d'individus.

3) Visualisation avec [Geogebra]

4)Montrer que l'équation différentielle $P' = 0.1P\left(1-\frac{P}{10}\right)$ avec la condition initiale P(0)=1 a pour solution, la fonction P définie sur $[0;+\infty[$ par P(t)= $\frac{1}{0,1+0,9e^{-0,1t}}$. Etudier cette fonction (dérivée, variations, limite en l'infini, asymptote, représentation graphique appelée sigmoïde).

Revenons au modèle discret (le 1 est à faire à la maison)

1) En posant $\mathbf{p_n} = \frac{\mathbf{P_n}}{\mathbf{K}}$ montrer que [II] équivaut à $\mathbf{p_{n+1} = p_n + a\, p_n\,(1 - p_n)}$

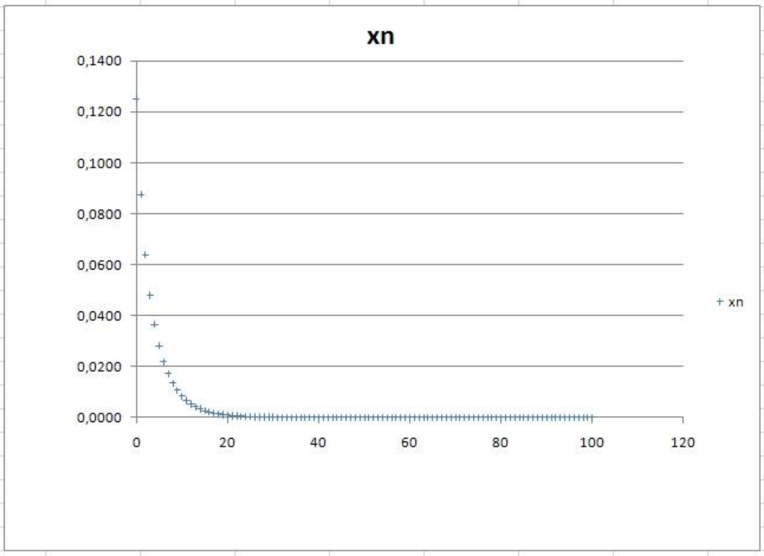
puis en posant $\mathbf{x_n} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a+1}}\mathbf{p_n}$, montrer que $\mathbf{(x_n)}$ vérifie la relation de récurrence :

$\boxed{\mathbf{x_{n+1} = k\, x_n\, (1 - x_n)}}$ est appelée **équation logistique**

dans laquelle $\mathbf{k = 1 + a}$, et pour tout n, x_n est un réel compris entre 0 et 1.

2) Avec **un tableur** ou **une calculatrice graphique**, on veut conjecturer le comportement de cette suite pour différentes valeurs de k (convergence, sens de variation).

	A	B	C
1	k	n	x_n
2	0,8	0	0,1250
3		1	0,0875
4		2	0,0639
5		3	0,0478
6		4	0,0364
7		5	0,0281
8		6	0,0218
9		7	0,0171
10		8	0,0134
11		9	0,0106
12		10	0,0084
13		11	0,0067
14		12	0,0053
15		13	0,0042
16		14	0,0034
17		15	0,0027
18		16	0,0021
19		17	0,0017
20		18	0,0014
21		19	0,0011
22		20	0,0009
23		21	0,0007
24		22	0,0006
25		23	0,0004



Quelle formule mettre dans la cellule C3 d'un tableur pour générer les termes de la suite (x_n) dans la colonne C avec la poignée de recopie ?

3) Visualisation avec [Sinequanon] et [un tableur].
On interprétera les cas suivants : k=0,8 ; k=2,8 ; k=3,2 ; k=3,5 ; k=3,55 ; et après ?
Reprendre l'étude avec x_0=0,4 ; x_0=0,5 x_0=0,9 . Y a-t-il sensibilité du comportement au premier terme ?
Faire une synthèse suivant les valeurs de k. **(à rédiger précisément à la maison)**

Fichiers et liens disponibles à partir de l'Univers Netvibes http://www.netvibes.com/inclassablesmathematiques onglet « Le cahier de textes et le blog » ou directement sur le blog « Maths au Lycée » : http://mathsaulycee.blogspot.com/