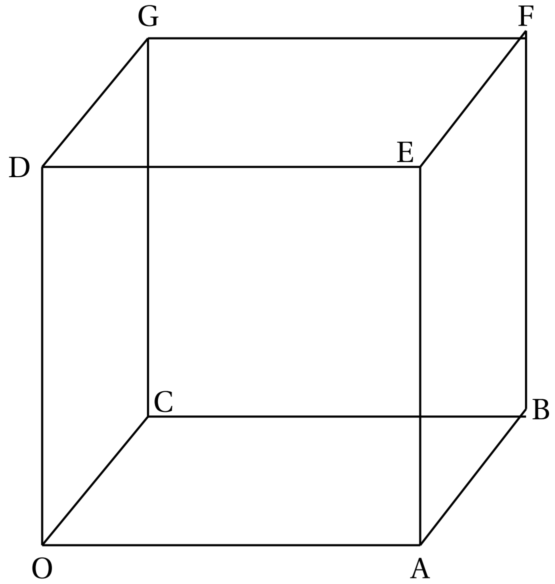

Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-dessus.
L'espace est orienté par le repère orthonormai direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\,\overrightarrow{\mathrm{OC}},\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$.
On désigne par a un réel strictement positif.
L, M et K sont les points définis par $\overrightarrow{\mathrm{O}L} = a\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, et $\overrightarrow{\mathrm{B}K} = a\overrightarrow{\mathrm{BF}}$.

1. **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{D}M} \wedge \overrightarrow{\mathrm{D}L}$.

   b. En déduire l'aire du triangle DLM.

   c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).

2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).

   a. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{O}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}K} = \overrightarrow{\mathrm{O}H} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}K}$.

   b. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}H}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}K}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}H} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{O}K}$. Démontrer que $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$. En déduire que H appartient au segment [OK].

   c. Déterminer les coordonnées de H.

   d. Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{O}K}$. En déduire que $HK = \dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a.