Application de la dérivation

1.1. Etude du sens de variation d'une fonction dérivable

1. Du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété 1 :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si *f* est croissante sur I, alors pour tout *x* de I, $f'(x) \geq 0$ (1)
- Si *f* est constante sur I, alors pour tout *x* de I, $f'(x) = 0$
- Si *f* est décroissante sur I, alors pour tout *x* de I, $f'(x) \leq 0$.

Démonstration (1) :

Considérons *f* **croissante** sur I. Soit *x* un réel de I et *h* un réel non nul tel que $x + h \in I$.

- Si *h*>0, alors $x + h \geq x$. Or *f* est croissante sur I, donc $f(x+h) \geq f(x)$
- Si *h*<0, alors $x + h \leq x$. Or *f* est croissante sur I, donc $f(x+h) \leq f(x)$

Dans tous les cas, $f(x+h) - f(x)$ et *h* sont de même signe, donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$

f est dérivable en *x* donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a une limite réelle $f'(x)$ lorsque *h* tend vers 0.

D'après ce qui précède pour tout *h* (qui tend vers 0), $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$

2. Du signe de la dérivée au sens de variation

2.1. Observations des fonctions de référence

Utilisation du logiciel de géométrie dynamique Geogebra

2.2. Conclusion

Nous venons d'observer pour les fonctions de référence que :

- Si *f* est dérivable sur l'intervalle I et si *f* est croissante sur I, alors *f'* est positive sur I.
- Si *f* est dérivable sur l'intervalle I et si *f* est décroissante sur I, alors *f'* est négative sur I.

Nous admettons ce résultat pour toutes les fonctions

2.3. Généralisation par un théorème admis

Propriété 2 : (admise)

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout nombre réel *x* de I, $f'(x) \geq 0$, alors *f* est croissante sur I
- Si pour tout nombre réel *x* de I, $f'(x) = 0$, alors *f* est constante sur I

- Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.

Remarque : si f est croissante sur I et si sa dérivée ne s'annule pas sur I ou bien seuelement en quelques points de I, on dit que f est **strictement croissante** sur I

1.2. Extremum local, majorant, minorant

1. Extremum local

Définition 1 :

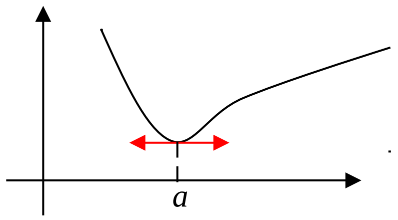
Soit f une fonction définie sur I et x_0 un réel de I.

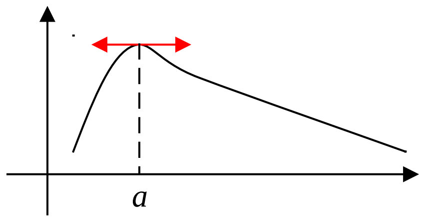
- Dire que $f(x_0)$ est un maximum local (resp. minimum local) de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$)
- Dire que $f(x_0)$ est un extremum local de f signifie que $f(x_0)$ est un amaximum ou un minimum local de f.

2. Extremum local et dérivée

Propriété 3 : (admise)

Si f est dérivable sur un intervalle I et admet un extremum local en un point a distinct des extrémités de I (on parlera d'intervalle ouvert), alors $f'(a)=0$.





ATTENTION

La réciproque n'est pas toujours vérifiée. La fonction $f : x \mapsto x^3$ admet pour dérivée 0 en 0, mais la fonction n'admet pas d'extremum en 0.

Propriété 4 admise :

Si f est dérivable sur un intervalle ouvert et a un réel de I. Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local de f.

Tableau de variations

x		a	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗

x		a	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

1.3. Exemples d'étude d'une fonction

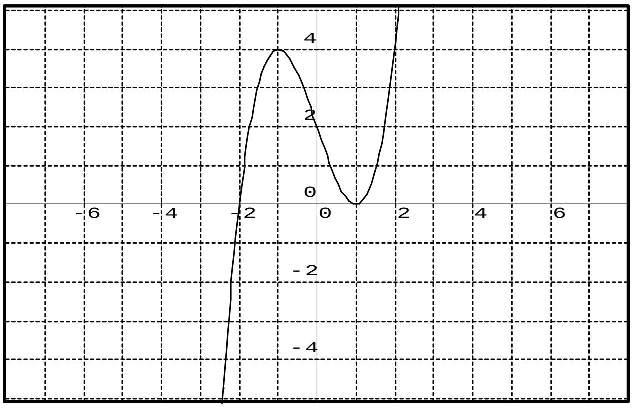
Pour Etudier une fonction et construire ensuite sa représentation graphique, on procède généralement de la manière suivante:

- Etude des variations :

- Dérivée
  - Signe de la dérivée
  - Tableau de variation
- Le plan étant muni d'un repère orthogonal ou orthonormal, on dessine la courbe représentative après avoir placé :
  - Les éventuels points représentatifs des extremums
  - Des points ou des droi
  - Quelques points obten atrice

AU CHOIX

TP1 : Etude du sens de variation d'une fonction sur définie sur l'intervalle $[-3;2]$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$. (**3ème degré**)



- $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$
  $f'(x) = (x-1)(x+1)$

Du lien qui unit le signe de la dérivée et les variations de la fonction, on en déduit que *f* est croissante sur [-3 ;-1], décroissante sur [-1 ;1] puis croissante sur [1 ;2]

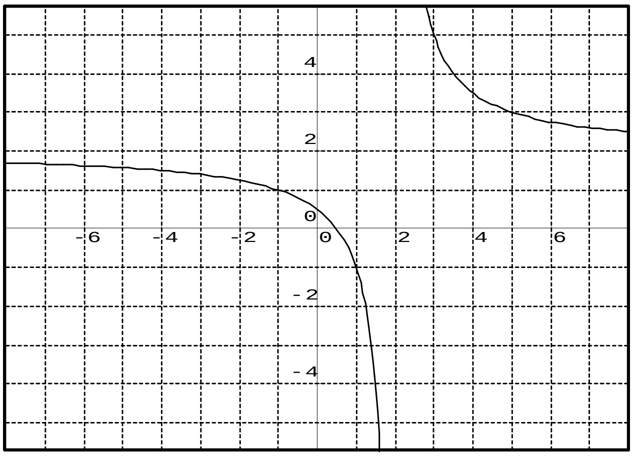
- Tableau de variations

x	-3		-1		1		2
x-1		-	|	-	0	+	
x+1		-	0	+	|	+	
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	-16	↗	4	↘	0	↗	4

- Développer : $(x-1)^2(x+2)$

En déduire les abscisses des points d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses

TP2 : Etude sens de variation d'une fonction sur définie sur l'intervalle $[-6;2[\cup]2;8]$ par $f(x) = \dfrac{-2x+1}{-x+2}$. (**fonction homographique**)



- $f'(x) = \dfrac{-3}{(-x+2)^2}$
  - Tableau de variations

x	-6		2		8
-3		-	|	-	
(-x+2)²		+	0	+	
f'(x)		-	||	-	
f(x)		↘	||	↘	

Application à une <u>situation problème</u> : LA CASSEROLE

Une entreprise fabrique des casseroles de contenance 1 L. Elle cherche à utiliser le moins de métal possible. (on ne tiendra pas compte du manche).

r désigne le rayon du cercle intérieur et h la hauteur de la casserole en centimètre.
a) Exprimer h en fonction de r.
b) $S(r)$ est l'aire latérale plus 'aire du disque intérieur en cm^2. Expliquer pourquoi pour tout $r>0$, $S(r)=\pi r^2+\frac{2000}{r}$.
c) Etudier les variations de la fonction S.
En déduire que la quantité de métal utilisée sera minimale lorsque $h^3=r^3$ c'est-à-dire lorsque $h=r$.