13. La loi Binomiale

1.1. *Epreuve et schéma de Bernoulli*

1. Epreuve de Bernoulli

Définition 1 :
Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée succès (*S*), l'autre échec ($\overline{S}$).

Exemple :
On lance une pièce de monnaie. On appelle par exemple le succès l'issue Pile et l'échec l'issue Face
On prend dans une production industrielle importante une pièce et on vérifie sa conformité. On appelle succès « la pièce est défectueuse »

2. Loi de Bernoulli

Définition 2 :
Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité définie sue l'ensemble $E = \{S;\overline{S}\}$ des issues d'une épreuve de Bernoulli.
On associe le succès S une probabilité p $(0 \leq p \leq 1)$.
La probabilité de l'échec $\overline{S}$ est donc $1 - p$ expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée succès (*S*), l'autre échec ($\overline{S}$).

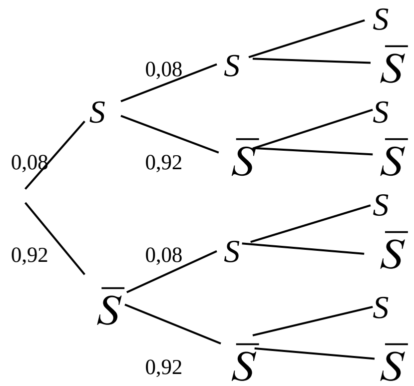
Exemple :
8% de la production industrielle est défectueuse. La probabilité de « succès » est $p = 0{,}08$
La loi de Bernoulli de paramètre 0,08 est donc :

Issue	Défectueuse « succès »	Conforme « échec »
Probabilité	0,08	0,92

Schéma de bernoulli

Définition 3 :
Un **schéma de Bernoulli** est une répétition d’épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple :
On répète trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendante sur la production industrielle
(Attention : on considère que chaque tirage est avec remise, sinon les expériences ne sont plus identiques, ni indépendantes)



1.2. La loi binomiale

1. Définition de la loi binomiale

Définition 4 :
On considère un schéma de Bernoulli, répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre p. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur ces n épreuves.
La **loi de probabilité** de la variable aléatoire X égale au nombre de succès au cours de ces n épreuves se nomme **la loi binomiale de paramètre *n* et *p***. on la note $\mathcal{B}(n;p)$.

Exemple
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses obtenues dans l’exemple ci-dessus.
Les valeurs que peut prendre X sont : 0,1,2 ou 3
Loi de probabilité de X

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$(1-p)^3$ $0{,}92^3$	$3p(1-p)^2$ $3\times 0{,}08\times(0{,}92)$	$3p^2(1-p)$ $3\times 0{,}08^2\times 0{,}92$	p^3 $0{,}08^3$

2. Coefficients binomiaux

Définition 5 :

On réalise l'arbre d'un schéma de Bernoulli, répétition de *n* épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Pour tout entier *k* $0 \le k \le n$, le nombre de chemins réalisant *k* succès est noté $\binom{n}{k}$ (lire « *k* parmi *n* »). Ces nombres sont appelés **coefficients binomiaux**.

Propriété 1 :

Si *X* est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre *n* et *p*, alors pour tout entier *k*,

$0 \le k \le n$, $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Preuve :

Considérons un chemin de l'arbre constitué de *k* succès de probabilité *p*, et *k* $n-k$ échec ce probabilité *k* $1-p$. Ce chemin conduit à une issue dont la probabilité est donné par $p^k (1-p)^{n-k}$

Mais il y a $\binom{n}{k}$ chemins réalisant *k* succès. Donc $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Espérance et variance de la loi binomiale

Propriété 2 : (admise)

Si *X* est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre *n* et *p*, alors :

$E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

1.3. Propriété des coefficients binomiaux

1. Propriétés

Propriété 3 :

Pour tout entier *n*, $n \ge 1$, $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$

Preuve : Dans un arbre, un seul chemin ne réalise aucun succès et un seul chemin réalise *n* succès.

Propriété 4 : (symétrie des coefficients)

Pour tout entier *n* et *k*, $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

<u>Preuve :</u> Dans un arbre, il y a autant de chemins qui réalise *k* succès que de chemins qui réalisent *k* échecs, c'est-à-dire *n*-*k* succès.

2. <u>Triangle de pascal</u>

<u>Propriété 5 :</u>

Pour tout entier *n* et *k*, $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

<u>Démonstration</u>

Lors de la réalisation de $n+1$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le nombre de chemins réalisant $k+1$ succès est $\binom{n+1}{k+1}$. Parmi ces chemins, il y en a de deux types :

- Ceux qui commencent par un succès ; il faut donc ensuite *k* succès parmi *n* épreuves soit

$\binom{n}{k}$

- Ceux qui commencent par un échec. il faut donc ensuite k +1 succès parmi n épreuves soit $\binom{n}{k+1}$

Donc $$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

k n	0	1	2	3	4	5
0	**1**					
1	**1**	**1**				
2	**1**	**2**	**1**			
3	**1**	**3**	**3**	**1**		
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**	
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**

<u>Conséquence :</u> le triangle de Pascal :

On peut calculer les $\binom{n}{k}$ de proche en proche

On convient que $\binom{0}{0}=1$

On obtient un autre nombre du tableau en additionnant le nombre juste au dessus et celui situé à gauche sur la ligne précédente