1. Suites géométriques

1. Suites géométriques

Définition 1 :

Dire qu'une suite u est **géométrique** de **raison** q signifie que tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$

1. Exemples

- Trouver des exemples de suites géométriques et de situation concrètes associées.
- La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{2^n}$, où n appartient à $\mathbb{N}$, est une suite géométrique puisque pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \cdots$.
- La raison est ..., le premier terme est $u_0 = \ldots$

2. Expression explicite du terme u_n en fonction de n

Propriété 1 :

Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, on a :

$\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$\boxed{u_n = u_p \cdot q^{n-p}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et p entier compris entre 0 et n.

REMARQUE :

On peut retenir : $u_n =$**(premier terme) x (raison)**$^{\text{n-indice du premier terme}}$

Démonstration

D'après la définition, nous pouvons écrire : $u_1 = u_0 \times q$

$$u_2 = u_1 \times q = (u_0 \times q) \times q = u_0 \times q^2$$

$$u_3 = u_2 \times q = (u_0 \times q^2) \times q = u_0 \times q^3$$

et ainsi de proche en proche, on a :

$$u_n = u_{n-1} \times q = \left(u_0 \times q^{(n-1)}\right) q = u_p \times q^n$$

Pour $p < n$, on a $u_p = u_0 q^p$, ainsi $\dfrac{u_n}{u_p} = \dfrac{u_0 q^n}{u_0 q^p} = u_0 q^{n-p}$

3. Reconnaissance d'une suite géométrique

Propriété 2 :

Si u est une suite telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = aq^n$ (avec a nombre réel), alors u est la suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = a$.

Preuve : il suffit d'écrire que $u_{n+1} = aq^{n+1} = aq^n \times q = q \times u_n$ pour revenir à la définition

4. Sens de variation de la suite q^n

Propriété 3 :

u est une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = q^n$ avec $q > 0$.

La suite géométrique u est croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$ et constante si $q = 1$.

Preuve : $u_{n+1} - u_n = q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$. Donc $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $q - 1$.

Remarque : Les suites géométriques de raison $q > 0$ correspondent à des évolutions exponentielles.

Lorsque $u_n = u_0 \times q^n$, si $u_n = u_0 < 0$, le sens de variation de u est inversé par rapport à (q^n).

Exemple 1 : La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est croissante.

En effet la suite définie par $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est décroissante d'après la propriété, mais chaque terme est multiplié par -2, nombre négatif, donc la suite est croissante.

5. Somme $1 + q + q^2 + ... + q^n$ et de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété 4 :

La somme des puissances successives d'un nombre réel $q \neq 1$, s'exprime sous la forme : $1 + q + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ et la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique u est :

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = premier\ terme\ de\ la\ somme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes\ de\ la\ somme}}{1 - raison}.$$

Démonstration

$$\begin{array}{lllllll}
S = & 1 & +q & +q^2 & +... & +q^{n-1} + & q^n \\
q \times S = & & q & +q^2 & +q^3 & +... & +q^n + q^{n+1} \\
\hline
S - qS = & 1 - q^{n+1} & & & & & \\
S(1-q) = & 1 - q^{n+1} & & & & &
\end{array}$$

d'où $S = 1 + q + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Remarque : si $q=1$, $S=n+1$

Pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, il suffit de multiplier par le premier terme u_0.

Projection Tableur
Recherche d'un rang

2. Limites de la suite

1. Approche de la notion de limite

B2 | f_x =1,03^A2

	A	B	C	D
1	n	a^n		
2	0	1		
156	154	94,8271296		
157	155	97,6719435		
158	156	100,602102		
159	157	103,620165		
160	158	106,72877		

Exemple 2 :

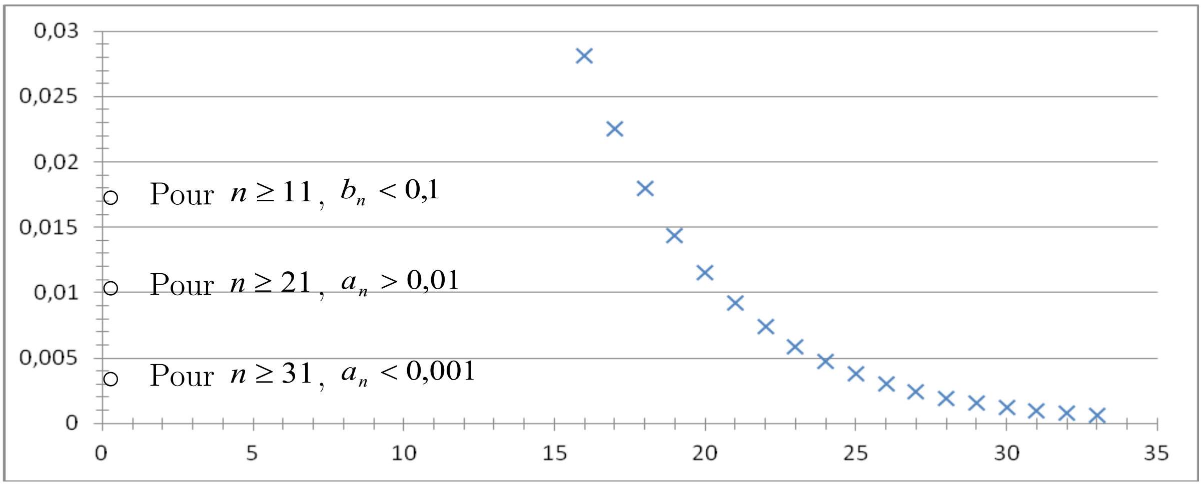
- (a_n) est la suite définie pour tout nombre entier naturel n par $a_n = 1{,}03^n$
- (a_n) est une suite croissante d'après la propriété 3 car 1,03>1.
- A l'aide d'un tableur, on peut montrer que
    - Pour $n \geq 156$, $a_n > 100$
    - Pour $n \geq 234$, $a_n > 1000$
    - Pour $n \geq 312$, $a_n > 10000$

Plus généralement, on peut démontrer que, pour tout nombre réel A, aussi grand que l'on veut, a_n dépasse définitivement A à partir d'un certain rang.

On dit que **la suite $(1{,}03^n)$ a pour limite $+\infty$** et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}03^n = +\infty$

Exemple 3 :

- (b_n) est la suite définie pour tout nombre entier naturel n par $b_n = 0{,}8^n$
- (b_n) est une suite décroissante d'après la propriété 3 car 0<0,8<1.
- A l'aide d'un graphique, on peut montrer que



- Pour $n \geq 11$, $b_n < 0{,}1$
- Pour $n \geq 21$, $a_n > 0{,}01$
- Pour $n \geq 31$, $a_n < 0{,}001$

Plus généralement, on peut démontrer que, pour tout nombre réel A, aussi proche de 0 que l'on veut, b_n est définitivement compris entre 0 et A à partir d'un certain rang.

On dit que **la suite** $(0{,}8^n)$ **a pour limite** 0 et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$

Algorithme :

Algorithme permettant de déterminer le rang N a partir du quel $u_n < 10^{-4}$ pour $u_n = 0{,}8^n$


```
A prend_la_valeur 1
K prend la valeur 0
Tant que A>10^-10 faire
     K prend_la_valeur K+1
     A prend_la-valeur 0,8*A
Fin Tant que
Afficher K
```

CASIO

```
1→A ↵
0→K ↵
While A>10^(-10) ↵
K+1→K ↵
0.8×A→A ↵
WhileEnd ↵
K▲
```

TEXAS

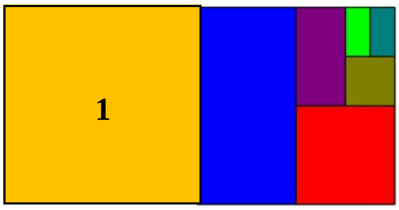
```
:1→A
:0→K
:While A>10^(-10)
:K+1→K
:0.8×A→A
:End
Disp K
```

2. Limite de la suite q^n avec $q>0$

Propriété 5 : **Admise**

q désigne un nombre réel strictement positif

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $0 < q < 1$, alors
- Remarque : si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$



Exemple 4 : Étudions la somme $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'après la somme étudiée au paragraphe précédent, on a $S_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$

Donc $S_n = \left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\times\frac{2}{1} = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0<\frac{1}{2}<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$

3. Suites arithmético-géométriques

1. Suite de type $u_{n+1} = au_n + b$

Définition :

Une suite **arithmético-géométrique** est une suite u définie par la donnée de u_0 et de la relation de récurrence : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ (où a et b sont des nombres réels donnés).

Cas particuliers :

- a=0, u est une suite constante à partir du rang 1 au moins

- $a \neq 0$ et $b = 0$, pour tout n, $u_{n+1} = au_n$ donc u est une suite géométrique de raison a.
- $a = 1$ $b = 0$, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + b$ donc u est une suite arithmétique de raison b.

Pour nos travaux, l'étude d'une telle suite sera ramenée à l'étude d'une suite géométrique.

Exemple 5 : Une ruche possède 800 abeilles. Chaque jour elle perd 10% de sa colonie mais en accueille 500 nouvelles.
Soit u la suite qui donne le nombre d'abeille chaque jour ($u_0 = 800$).

1) Quel est le nombre d'abeille le soir du 1er jour u_1? le soir du deuxième u_2 ?
2) Montrer que la situation peut être modélisée par une suite arithmético-géométrique
3) Conjecturer à l'aide d'un graphique la limite de la suite u.

2. Représentation graphique d'une suite aritmético-géométrique

Pour représenter graphiquement les termes d'une suite arithmético-géométrique, on peut utiliser le procédé géométrique ci-dessous, qui ne nécessite pas de calculer les valeurs des termes successifs.

Méthode

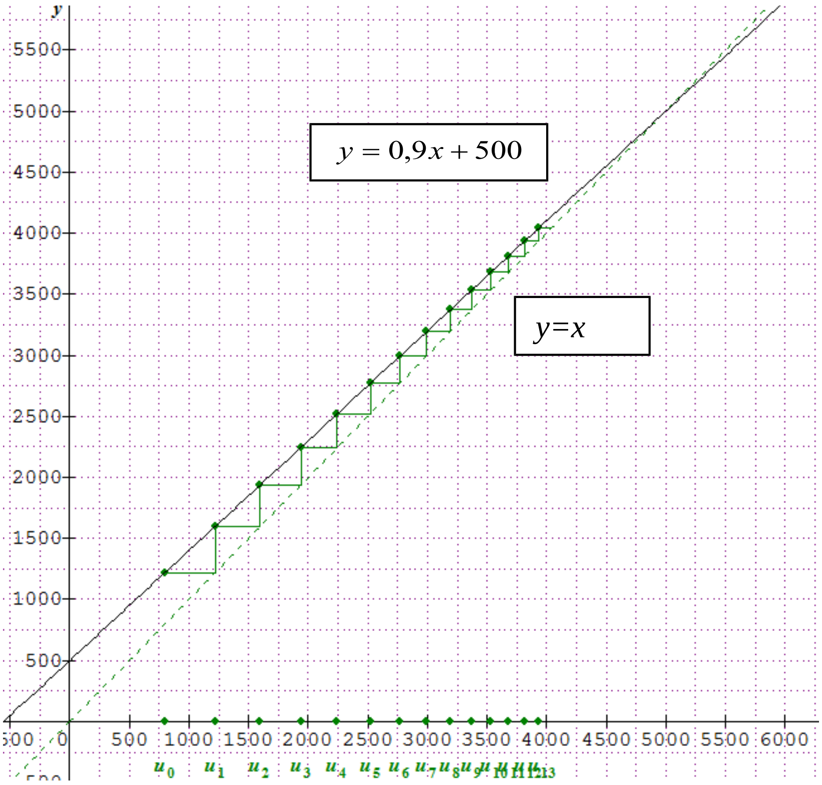
u est une suite définie par u_0 et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. Pour représenter graphiquement cette suite dans un **repère orthonormé** :

- (1) On trace la droite D d'équation $y = x$
  On trace la droite Δ d'équation $y = ax + b$
- (2) On place u_0 sur l'axe des abscisses,
- (3) On utilise la droite Δ pour placer $u_1 = au_0 + b$ sur l'axe des ordonnées,
  On utilise la droite D pour placer u_1 sur l'axe des abscisses,
- On recommence l'étape (3) pour placer u_2, u_3, ... sur l'axe des abscisses.

Reprenons l'exemple précédent.

On représente les droites D et Δ d'équation respective $y = x$ et $y = 0,9x + 500$.
$u_0 = 800$.

On obtient le graphique suivant :



On conjecture que la limite de la suite u est 5000.

Considérons la suite v définie par $v_n = u_n - 5000$

4) Montrer que la suite v est une suite géométrique de raison 0,9 et déterminer l'expression de v_n en fonction de n
5) Démonter que pour tout entier n, $u_n = -4200 \times 0,9^n + 5000$
6) En déduire la limite de la suite u. Interpréter ce résultat pour la situation de la ruche.

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 5000 \\
v_{n+1} &= 0,9u_n + 500 - 5000 \\
v_{n+1} &= 0,9u_n - 4500 \\
v_{n+1} &= 0,9(u_n - 5000)) \\
v_{n+1} &= 0,9v_n
\end{aligned}$$

Donc v est une suite géométrique de raison q=0,9 et de 1er terme $v_0 = u_0 - 5000 = 800 - 5000 = -4200$.

Ainsi $v_n = -4200 \times 0,9^n$

- $u_n = -4200 \times 0,9^n + 5000$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} - 4200 \times 0,9^n = 0$ car 0<0,9<1.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5000$.