2. LIMITES DE FONCTIONS

Contenu

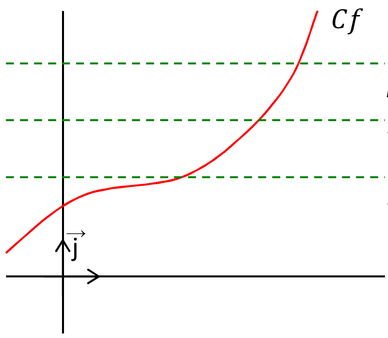
1) LIMITE en + ∞ et en – ∞

A) LIMITE INFINIE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[\, a \,; +\infty\,[$ où a est un réel.

Si « *$f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand* », alors on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$

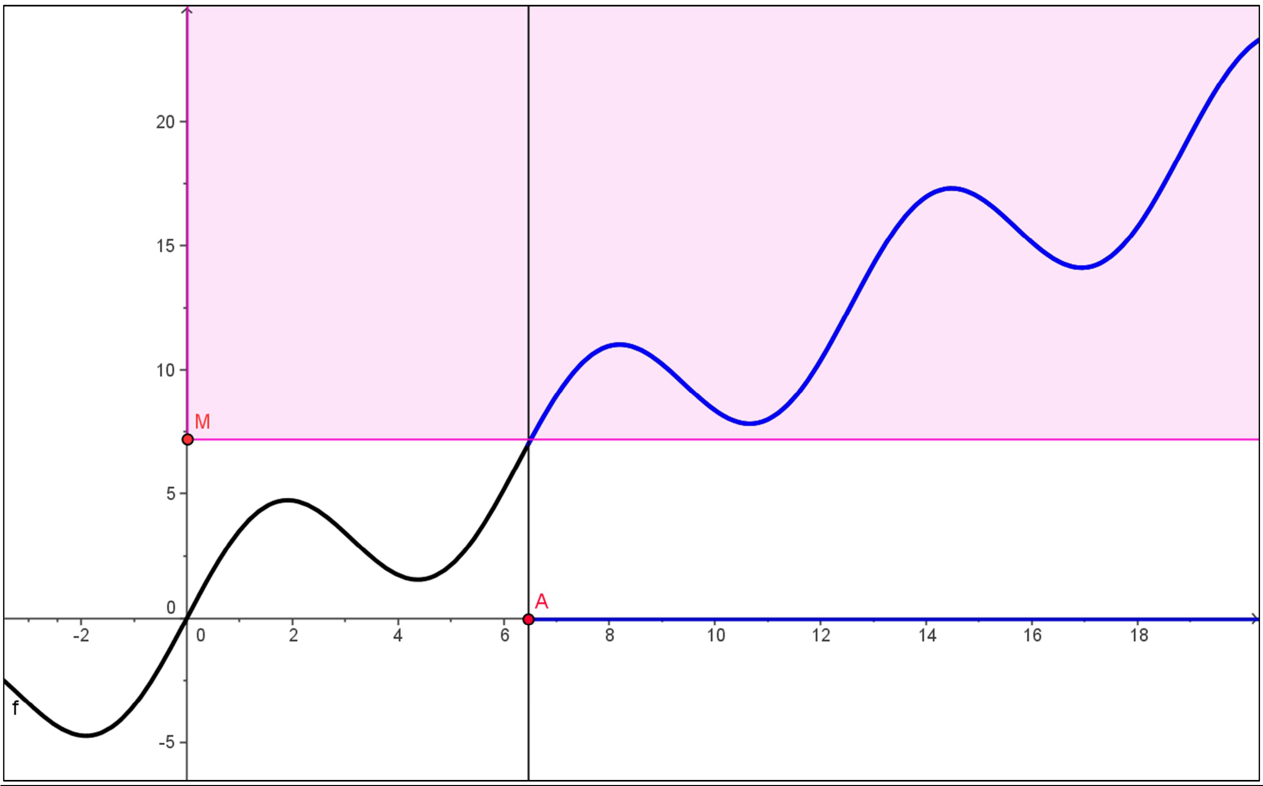
On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la courbe Cf finit par se situer au dessus de n'importe quelle droite horizontale.

Définition : Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert $]M\,;+\infty[$ avec $M > 0$, contient toutes valeurs de $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment grands (c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]A;+\infty[$.
On note :

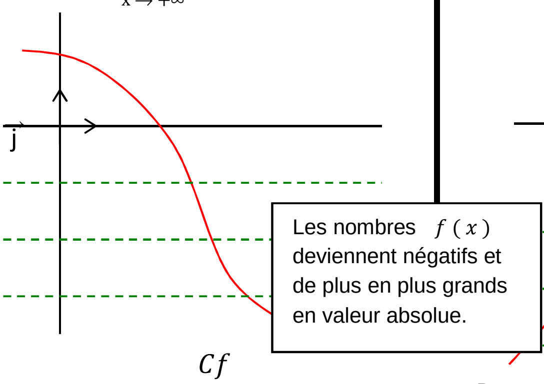
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



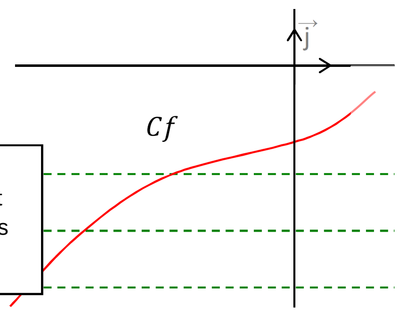
Limites de référence: $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ avec n entier naturel.

On définit de la même façon …

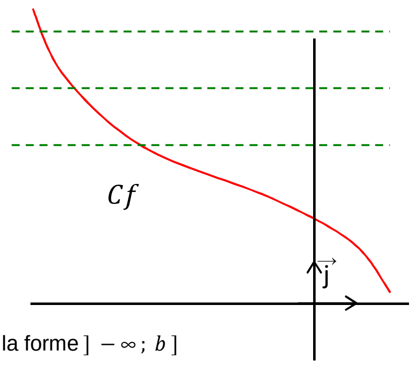
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



Dans ces deux cas, f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,;b]$

Remarque : Dans la pratique, on peut utiliser la remarque suivante : $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$

Limites de référence : $\lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\to -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$,

$\lim_{x\to -\infty} x^n = -\infty$ si n est impair , $\lim_{x\to -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair.

B) LIMITE FINIE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$ ET ASYMPTOTE HORIZONTALE

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[\, a\, ;\, +\infty\, [$ où a est un réel et L un réel donné.

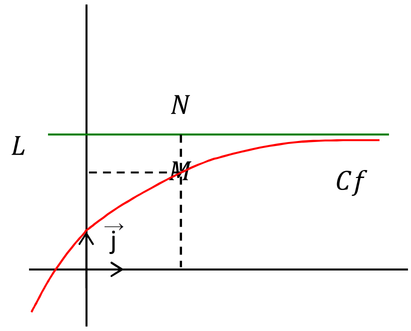
Intuitivement, dire que f a pour limite L en $+\infty$, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de L.

C'est à dire que pour tout α, $(\alpha > 0)$, aussi petit qu'il soit, les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]\, L-\alpha\ ;\ L+\alpha\, [$.

On note : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$

On dit que la droite d'équation $y = L$ est **<u>asymptote horizontale</u>** à la courbe Cf en $+\infty$.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance MN tend vers 0,. La courbe Cf se rapproche sans cesse de la droite d'équation $= L$.



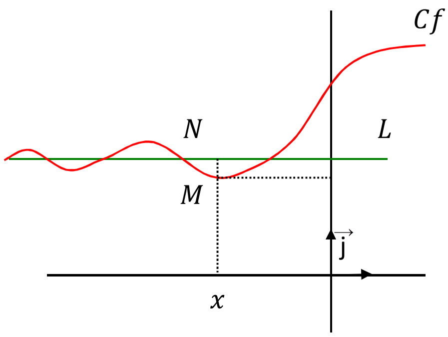
Définition : Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel l quand x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant L, contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment grands (c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]A, +\infty[$).
On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

<u>On définit de la même façon :</u>

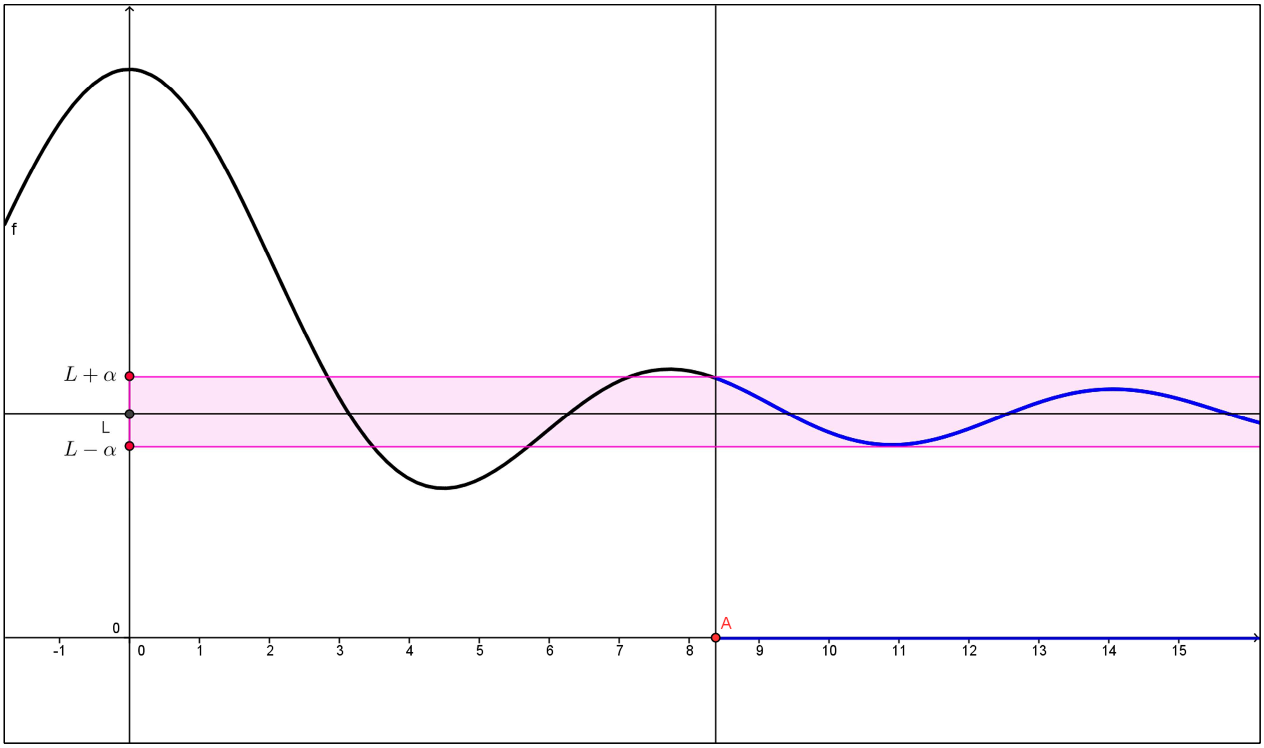
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$

f est définie sur un intervalle de la forme $]\, -\infty\, ;\, b\,]$



La distance MN tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

La droite d'équation $y = L$ est **<u>asymptote horizontale</u>** à la courbe Cf en $-\infty$.



Limites de référence :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

La courbe représentant la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$; les trois autres courbes admettent cet axe comme asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

Remarque : Une fonction n'a pas forcément une limite finie ou infinie quand x tend vers $+\infty$.

(Par exemple : $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, …)

C) Asymptote oblique

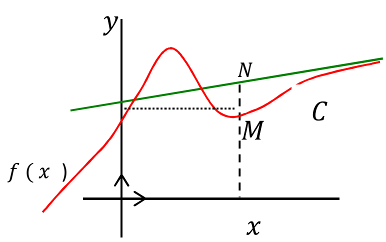
Soit a ($a \neq 0$) et b deux réels et C la courbe représentant une fonction f dans un repère.

Dire que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) revient à dire que :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

(respectivement $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$)

La distance MN tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.



Remarque : Une fonction peut avoir une limite infinie lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ sans que sa courbe possède une asymptote (c'est le cas de la fonction carré)

2) LIMITE en a (avec a réel)

Lorsque que l'on définit la limite d'une fonction f en un réel a, on considère que :

- ✓ $a \in Df$
- ✓ **ou** a est une borne de Df

A) LIMITE INFINIE EN a ET ASYMPTOTE VERTICALE

Soit f une fonction .

Si « ***$f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a*** » , alors on dit que f a pour limite $+\infty$ en a .

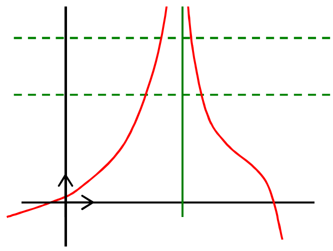
On note :

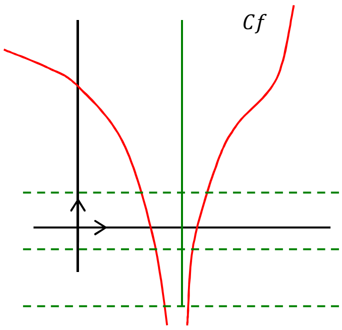
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

On définit de la même façon $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

On dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe Cf .

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a,la courbe Cf finit par se situer au dessus (et en dessous pour la deuxième figure) de n'importe quelle droite horizontale .



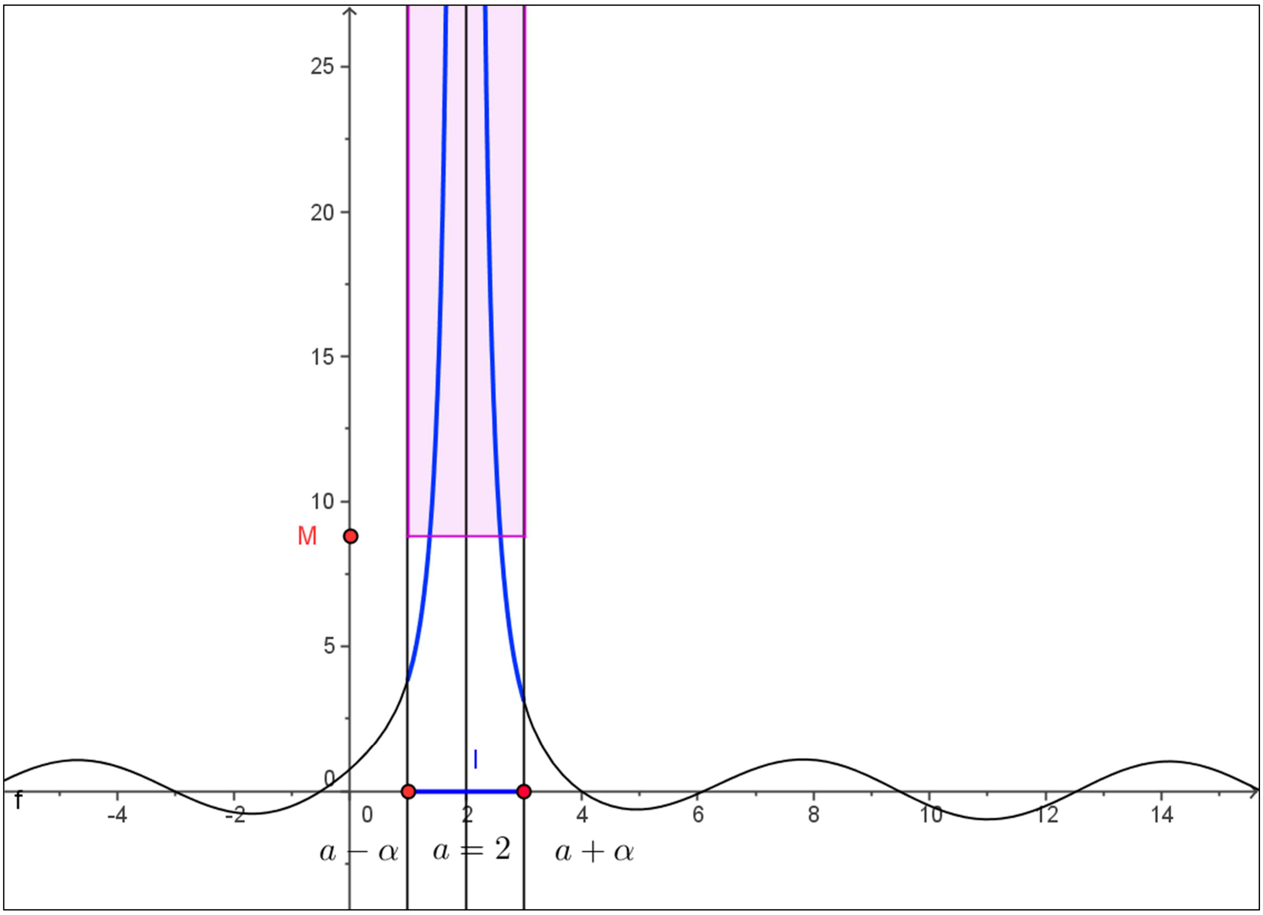


Définition f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Le nombre a est une borne de I.

Dire que f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle ouvert $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tous les nombres x de l'intervalle I suffisamment proches de a, c'est-à-dire pour tous les nombres de I dans un certain intervalle $]a-\alpha\,;\,a+\alpha[$.
On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

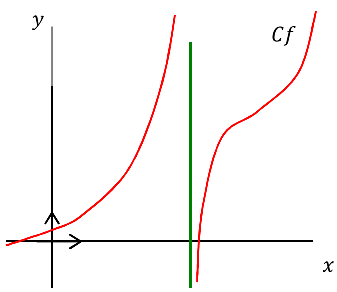
Cette définition traduit l'idée que les valeurs $f(x)$ arrivent, pour des valeurs de x de plus en plus proches de a, à dépasser n'importe quel nombre M aussi grand soit-il.



Remarque : Il arrive souvent qu'on soit amené à définir des limites ***« d'un seul côté de a »***. De manière plus mathématique, cela signifie que la restriction de f à $]a\,,c]$ et la restriction de f à $[\,b\,;\,a\,[$ n'admettent pas la même limite en a.

On introduit les notions de **limite à droite en a** et de **limite à gauche en a** et on note :

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$



Dans ce cas

$\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = +\infty$

Limites de référence :

- $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^3} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

Les courbes représentant ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

B) LIMITE FINIE EN a

On a déjà vu la notion de limite finie en zéro dans le chapitre sur la dérivation en première S.

La notion de limite finie en a est identique …

Remarque :
On admet que si une fonction f est définie en a et si f admet une limite finie en a, alors : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée et des composées de ces fonctions.

Cette remarque nous permet de déterminer rapidement la limite d'une telle fonction en tout point de son ensemble de définition.

Exemples : $\lim_{x \to 3} \sin(3x + 4) = \sin 13$, $\lim_{x \to 4} \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{19}$

Attention, comme nous le verrons dans un prochain chapitre, toutes les fonctions n'admettent pas forcément une limite finie en tout point de leur ensemble de définition . *(la limite à droite et la limite à gauche peuvent être différentes).* On dira dans ce cas que la fonction f n'est pas continue en a.

3) LIMITES ET OPERATIONS (Théorèmes)

Les **théorèmes** qui suivent, présentés sous forme de tableaux, sont admis.

Par convention et pour simplifier :

- ✓ on note $\lim f$ et $\lim g$ les limites de f et de g, toutes les deux en a, en + ∞ ou en - ∞.
- ✓ on note par un point d'interrogation (?) les cas où il n'y a pas de conclusion générale.
  On dit qu'il s'agit de cas **de formes indéterminées.**

Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

Limite de $k\,f$ (où k est un réel donné)

$\lim f$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim k\,f\ \ (avec\ k > 0)$	$k\,L$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim k\,f\ \ (avec\ k < 0)$	$k\,L$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h : x \# -\dfrac{2}{x^2}$.

On a $g = -2\,f$ avec $f : x \# \dfrac{1}{x^2}$

On en déduit ($-2 < 0$) que : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0-} g(x) = -\infty$

Limite de $f + g$

$\lim f$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (f + g)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur IR_+^* par $h : x \# \sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}$

On a $h = f + g$ avec $f : x \# \sqrt{x}$ et $g : x \# -\dfrac{2}{x^2}$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$; $donc$ $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

Limite de $f\,g$

$\lim f$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim (f\,.\,g)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur IR₊ par $h : x \mapsto (x + 2)\sqrt{x}$

On a $h = f \times g$ avec $f : x \mapsto x + 2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$

On sait que $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ et $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, donc $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$.

Limite de $\frac{f}{g}$

Cas où la limite de g n'est pas nulle — Cas où la limite de g est nulle

$lim\ f$	L	L	+ ∞	+ ∞	- ∞	- ∞	+ ∞ ou - ∞	L > 0 ou + ∞	L > 0 ou + ∞	L < 0 ou - ∞	L < 0 ou - ∞	0
$lim\ g$	L'	+ ∞ ou - ∞	L' > 0	L' < 0	L' > 0	L' < 0	+ ∞ ou - ∞	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$lim\ \frac{f}{g}$	$\frac{L}{L'}$	0	+ ∞	- ∞	- ∞	+ ∞	?	+ ∞	- ∞	- ∞	+ ∞	?

Remarque : « 0 en restant négative ou positive » signifie que g garde un signe constant au voisinage de a , en $+\infty$ ou en $-\infty$ suivant les cas .

Exemple : Soit la fonction h définie sur IR_+^* par $h : x \longmapsto \frac{2x - 4}{\sqrt{x}}$

On a $h = \frac{f}{g}$ où $f : x \longmapsto 2x - 4$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$

On a $h = \frac{f}{g}$ où $f : x \longmapsto 2x - 4$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$

On sait que $\lim_{x \to 0+} f(x) = -4$ et $\lim_{x \to 0+} g(x) = 0$;

d'autre part, pour tout > 0 , $\sqrt{x} > 0$; d'où $\lim_{x \to 0+} h(x) = -\infty$.

4) COMPOSEE ET LIMITES.

A) Composee de deux fonctions

Définition : Etant donné deux fonctions f et g, on dit que la fonction h définie par $h(x) = f(g(x))$ est la composée de g par f.

Exemple : Avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x} + 2$, on a $h(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{\frac{1}{x} + 2}$. Attention aux domaines de définition !

B) Limite de la composee de deux fonctions

Théorème (admis) : f et g sont deux fonctions.

a, b et c désignent soit des nombres, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} f(X) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = c$

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 2 = 2$ et $\lim\limits_{X \to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + 2} = \sqrt{2}$

C) Limite de la composee d'une suite et d'une fonction

Théorème (admis) : f est une fonction définie sur un intervalle I.

(v_n) est une suite dont tous les termes appartiennent à l'intervalle I.

b et c désignent soit des nombres, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = b$ et $\lim\limits_{X \to b} f(X) = c$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(v_n) = c$

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} + 2 = 2$ et $\lim\limits_{X \to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{n} + 2} = \sqrt{2}$

5) THEOREMES DE COMPARAISON

A) THEOREME DES GENDARMES

Théorème : f, g et h sont trois fonctions définies sur $I =]A\,;+\infty[$ ou $\mathbb{R}$. L désigne un nombre.

Si pour tout x de I, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, et si f et g ont même limite l en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

Voir démonstration p 57

B) COMPARAISON A L'INFINI

Théorème : f, g sont deux fonctions définies sur $I =]A\,;+\infty[$ ou $\mathbb{R}$.

Si pour tout x de I, $f(x) \geq g(x)$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Si pour tout x de I, $f(x) \leq g(x)$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Voir démonstration p 57.