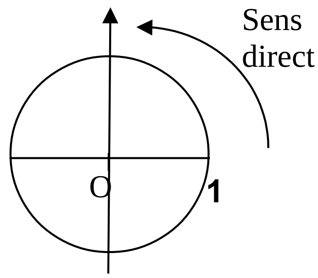
Trigonométrie

1. Le cercle trigonométrique

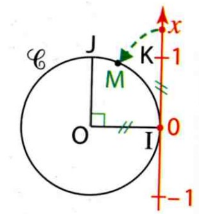


Soit $(O; I; J)$ un repère du plan

1. Cercle trigonométrique

Définition 1 : Le cercle trigonométrique de centre O est celui qui a pour rayon 1 et qui est muni d'un sens positif (direct) : le sens inverse des aiguilles d'une montre.

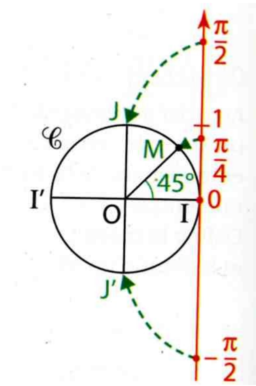
2. Enroulement de la droite numérique sur un cercle



C le cercle trigonométrique de centre O (et de rayon 1)

(O ; *I*, *J*) est un repère orthonormé **direct** : sur le cercle C, on se déplace de I vers J selon le trajet le plus court, dans le sens direct.

Soit D la tangente au cercle trigonométrique au point I et K le point de coordonnées (1 ;1). (*I* ;*K*) est un repère de D : cette droite graduée représente l'ensemble ◂ des nombres réels.



Par le procédé de l'enroulement de D autour du cercle :

- A tout point de D, d'abscisse x, correspond un point M du cercle ;

  On dit que **M est le point image du réel *x*.**
- Tout point du cercle est associé à une infinité de poins de l'axe D.

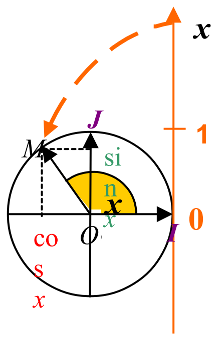
Exemple

J est le point image du réel $\frac{\pi}{2}$, J' le point image de $-\frac{\pi}{2}$.

M est le point image du réel $\frac{\pi}{4}$. On a alors $\widehat{IOM} = 45°$.

Propriété 1 : Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique C associé au réel x, alors le point M est associé à tous les réels de la forme $x + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

3.Cosinus et sinus d'un nombre réel



Définition 2 :

Soit M le point du cercle trigonométrique, associé à un réel x.

- on appelle **cosinus** du réel x noté $\cos x$, l'abscisse du point M.
- on appelle **sinus** du réel x noté $\sin x$, l'ordonnée du point M.

***Remarque* :** la mesure de l'arc de cercle correspond à x.

***Exemples* :**

- Le réel $\frac{\pi}{2}$ a pour image le point de coordonnées (0 ;1) donc $\cos\frac{\pi}{2}=0$ et $\sin\frac{\pi}{2}=1$.
- Le réel 0 a pour image le point de coordonnées (1 ; 0) donc $\cos\frac{\pi}{2}=1$ et $\sin\frac{\pi}{2}=0$.

***Propriété 2* :** Quel que soit le nombre réel x :

- $-1\leq\cos x\leq 1$ $\quad$ $-1\leq\sin x\leq 1$
- $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Remarque : le réel $(\cos x)^2$ est noté $\cos^2 x$

***Démonstration* :**

- L'abscisse et l'ordonnée de tout point du cercle sont comprises entre -1 et 1, d'où les deux premières propriétés.
- Pour la troisième proposition, il faut utiliser le théorème de Pythagore.

4. Le radian

***Définition 3* :**

Soit K le point de D d'abscisse 1.

Par enroulement de la droite autour du cercle, on lui associe le point R.

La longueur de l'arc IR est 1.

Le **radian** est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ interceptant un arc de longueur 1 sur le cercle trigonométrique

Conséquence : Soit A et B deux points du cercle trigonométrique, la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ est égale à la longueur de l'arc intercepté $\overset{\frown}{AB}$.

***Propriété 3* :**

La mesure d'un angle en radians est proportionnelle à sa mesure en degré

Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°

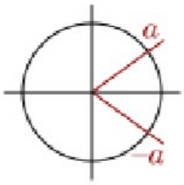
5. Tableau de valeurs remarquables des cosinus et sinus

Voici quelques valeurs remarquables

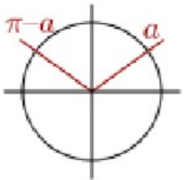
Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Mesure en degré	0°	30°	45°	60°	90°
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

2. Trigonométrie

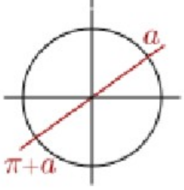
$$\cos(-a) = \cos a$$
$$\sin(-a) = -\sin a$$
$$\tan(-a) = -\tan a$$



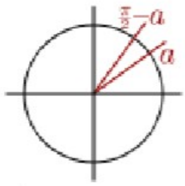
$$\cos(\pi - a) = -\cos a$$
$$\sin(\pi - a) = \sin a$$
$$\tan(\pi - a) = -\tan a$$



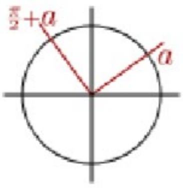
$$\cos(\pi + a) = -\cos a$$
$$\sin(\pi + a) = -\sin a$$
$$\tan(\pi + a) = \tan a$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan a} = \cot a$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\frac{1}{\tan a} = -\cot a$$



3. Résolution des équations sinx=a et cosx=a

- Si $a \notin [-1;1]$, l'équation $\sin x = a$ n'a pas de solution
- Si $a \in [-1;1]$, il existe $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, unique, tel que $\sin\alpha = a$

L'équation $\sin x = \sin\alpha$ admet deux types de solution :

(1) $x = \alpha + 2k\pi$

(2) $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ avec k entier relatif quelconque

EN TOUT ETAT DE CAUSE,
NE JAMAIS HÉSITER A DESSINER UN CERCLE TRIGONOMETRIQUE

- Si $a \notin [-1;1]$, l'équation $\cos x = a$ n'a pas de solution
- Si $a \in [-1;1]$, il existe $\alpha \in [0;\pi]$, unique, tel que $\cos\alpha = a$

L'équation $\cos x = \cos\alpha$ admet deux types de solution :

(3) $x = \alpha + 2k\pi$

(4) $x = -\alpha + 2k\pi$ avec k entier relatif quelconque