Fonctions de référence

1. Sens de variation

1. Sens de variation

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- f est **croissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$. **(strictement croissante si $f(a) < f(b)$). On dit que f conserve le sens des inégalités.**
- f est **décroissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$. **On dit que f inverse le sens des inégalités**.
- f est **constante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) = f(b)$.
- f est monotone sur l'intervalle I si elle est ou croissante ou décroissante sur I

2. Variation des fonctions de référence

Propriété 1 : Fonction affine $f : x \mapsto ax + b$

- Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$

Propriété 2 : Fonction carré $f : x \mapsto x^2$

- La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$
- La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.
-

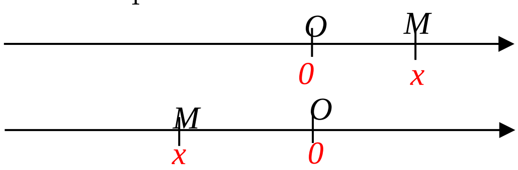
Propriété 3 : Fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

- La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$.

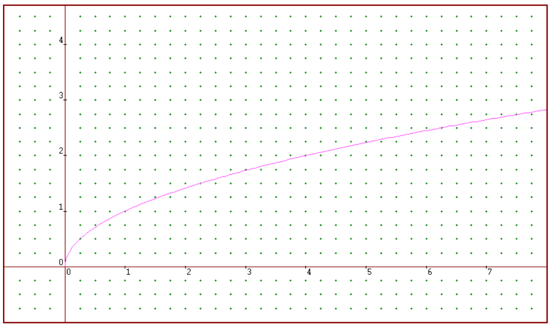
2. Fonction valeur absolue

Définition 2 :

- Sur une droite graduée d'origine O, x est l'abscisse d'un point M. La ***valeur absolue*** d'un réel x, notée $|x|$, est la distance OM.
  si x est positif, alors $|x| = x - 0 = x$
  si x est négatif, alors $|x| = 0 - x = -x$



- La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$



Exemples : $|-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$;$|10^{-2}| = 10^{-2}$; $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

Propriété 4 : Quel que soit le nombre x : $|-x| = |x|$

Propriété 5 : Quel que soit les nombres x et y :

$|x| = 0$ signifie x=0 $\qquad$ $|x| = |y|$ signifie x=y ou x=-y

$|xy| = |x| \times |y|$ $\qquad$ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ avec $y \neq 0$

$|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

Propriété 6 : Fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$

La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

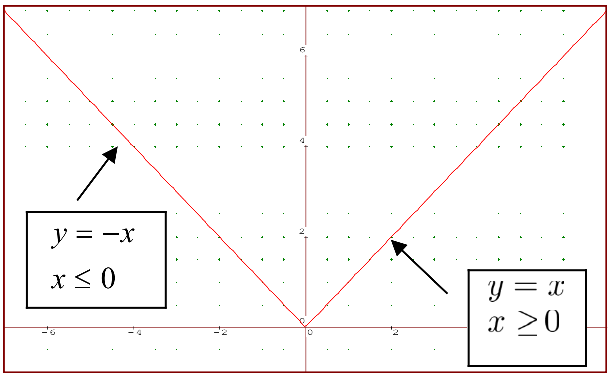
Démonstration : en exercice

Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) = |x| = x$, donc f est croissante sur $[0; +\infty[$

Pour tout réel $x \leq 0$, $f(x) = |x| = -x$, donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$

Représentation graphique

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est la réunion des demi-droites d'équations
$y=-x$ sur $]-\infty;0]$
$y=x$ sur $[0;+\infty[$



Propriété 7 : Dans un repère orthogonal,la courbe représentative de la fonction valeur absolue est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

3. La fonction racine carrée

1. Fonction racine carrée

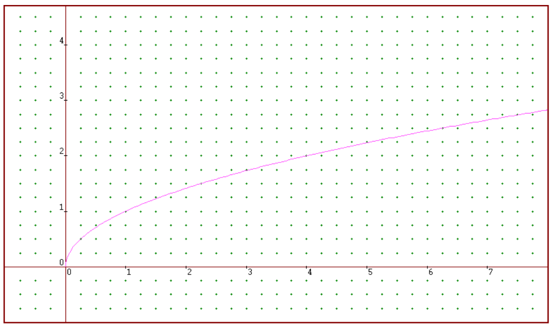
Définition 3 : La fonction f telle que $f:x\mapsto\sqrt{x}$ est appelée « fonction racine carrée ». Elle est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Propriété 7 :

f est strictement **croissante** sur $[0;+\infty[$.

Tableau de variations :

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
variations de f	0 $\nearrow$



Démonstration :

Soient a et b deux réels tels que $0\leq a<b$.

$f(b)-f(a)=\sqrt{b}-\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}=\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$

Or, $b-a>0$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$. Par conséquent $f(b)-f(a)>0$, soit $f(a)<f(b)$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Propriété 8 :

Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$

Démonstration

- Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x^2} = x$
- Si $x \leq 0$, alors $-x \geq 0$. Or $(-x)^2 = x^2$, d'où $\sqrt{x^2} = -x$

2. Représentation graphique de la fonction racine carrée

Propriétés 9 :

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative C de la fonction racine carrée et la courbe représentative P de la fonction carré sur $[0;+\infty[$ sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$

Démonstration :

$y = \sqrt{x}$ équivaut à $x = y^2$, c'est-à-dire $M(x;y)$ appartient à C si et seulement si $M'(y;x)$ appartient à P.

4. Position relatives des courbes

Propriété 10 : $x \mapsto x; x \mapsto x^2; x \mapsto \sqrt{x}$

- Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$
- Si $x \geq 1$ alors $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$

Démonstration

- Si $0 \leq x \leq 1$,
  - en multipliant par x chaque membre de cette inégalité, on obtient $x^2 \leq x$
  - Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$, on obtient, à partir de l'inégalité précédente $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x}$, soit $x \leq \sqrt{x}$ car pour x positif $\sqrt{x^2} = x$

  Ainsi $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$

- Si $x \geq 1$
  - en multipliant par x chaque membre de cette inégalité, on obtient $x \leq x^2$
  - Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$, on obtient, à partir de l'inégalité précédente $\sqrt{x} \leq \sqrt{x^2}$, soit $\sqrt{x} \leq x$ car pour x positif $\sqrt{x^2} = x$

  Ainsi $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$

Conséquence graphique :