

3. Fonctions associées

1. Sens de variation – fonction valeur absolue

1. Sens de variation

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- f est **croissante** sur I , lorsque pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$. (strictement croissante si $f(a) < f(b)$). On dit que f conserve le sens des inégalités.
- f est **décroissante** sur I , lorsque pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$. On dit que f inverse le sens des inégalités.
- f est **constante** sur I , lorsque pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) = f(b)$.
- f est monotone sur l'intervalle I si elle est ou croissante ou décroissante sur I

2. Variation des fonctions de référence

Propriété 1 : Fonction affine $f : x \mapsto ax + b$

- Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur \mathbb{R}
- Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur \mathbb{R}
- Si $a = 0$, alors f est constante sur \mathbb{R}

Propriété 2 : Fonction carré $f : x \mapsto x^2$

- La fonction carré est décroissante sur $] -\infty; 0]$
- La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.

Propriété 3 : Fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

- La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$.

2. Fonction valeur absolue

Définition 2 :

- Sur une droite graduée d'origine O , x est l'abscisse d'un point M . La **valeur absolue** d'un réel x , notée $|x|$, est la distance OM .

si x est positif, alors $|x| = x - 0 = x$

si x est négatif, alors $|x| = 0 - x = -x$
- La fonction valeur absolue est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$

Exemples : $\left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}$; $|10^{-2}| = 10^{-2}$; $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

Propriété 4 : Quel que soit le nombre x : $|-x| = |x|$ et $\sqrt{x^2} = |x|$

Propriété 5 : Quel que soit les nombres x et y :

$|x| = 0$ signifie $x=0$

$|x| = |y|$ signifie $x=y$ ou $x=-y$

$|xy| = |x| \times |y|$

$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ avec $y \neq 0$

$|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

Propriété 6 : *Fonction valeur absolue* $f : x \mapsto |x|$

La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

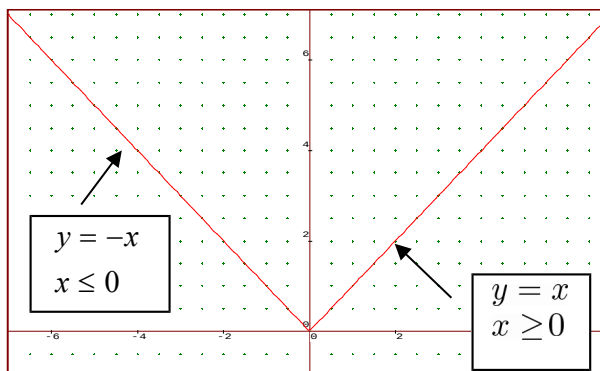
Démonstration : en exercice

Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) = |x| = x$, donc f est croissante sur $[0; +\infty[$

Pour tout réel $x \leq 0$, $f(x) = |x| = -x$, donc f est décroissante sur $] -\infty; 0]$

Représentation graphique

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est la réunion des demi-droites d'équations $y = -x$ sur $x \leq 0$ et $y = x$ sur $[0; +\infty[$



Propriété 7 : Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. La fonction racine carrée

1. Fonction racine carrée

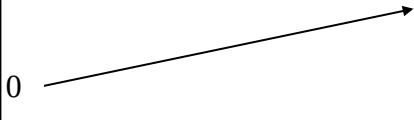
Définition 3 : La fonction f telle que $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est appelée « fonction racine carrée ». Elle est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Propriétés 7 :

f est strictement **croissante** sur $[0; +\infty[$.



Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
f'		+
f	0	

Démonstration :

Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$.

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \frac{b - a}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})}$$

Or, $b - a > 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$. Par conséquent $f(b) - f(a) > 0$, soit $f(a) < f(b)$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Propriétés 8 :

Pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$

Démonstration

- Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x^2} = x$
- Si $x \leq 0$, alors $-x \geq 0$. Or $(-x)^2 = x^2$, d'où $\sqrt{x^2} = -x$

2. Représentation graphique de la fonction racine carrée

Propriétés 9 :

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative C de la fonction racine carrée et la courbe représentative P de la fonction carré sur $[0; +\infty[$ sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$

Démonstration :

$y = \sqrt{x}$ équivaut à $x = y^2$, c'est-à-dire $M(x; y)$ appartient à C si et seulement si $M'(y; x)$ appartient à P .

4. Position relatives des courbes

Propriété 10 : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$

- Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$
- Si $x \geq 1$ alors $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$

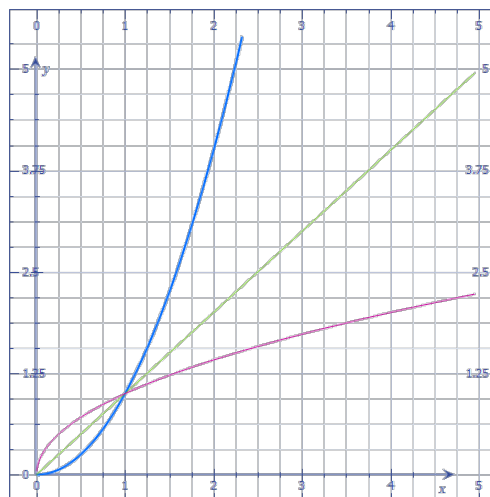
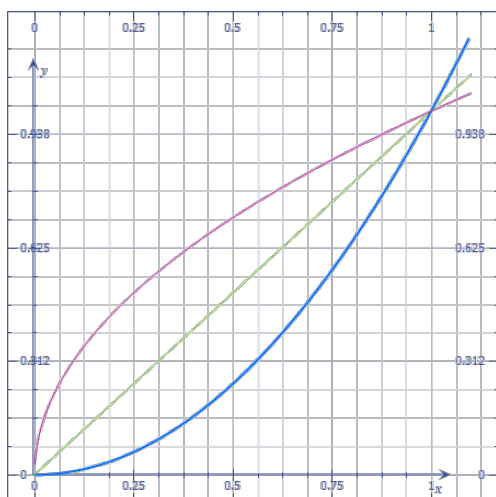
Démonstration

- Si $0 \leq x \leq 1$,
 - en multipliant par x chaque membre de cette inégalité, on obtient $x^2 \leq x$
 - Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, on obtient, à partir

de l'inégalité précédente $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x}$, soit $x \leq \sqrt{x}$ car pour x positif $\sqrt{x^2} = x$
Ainsi $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$

- Si $x \geq 1$
 - en multipliant par x chaque membre de cette inégalité, on obtient $x \leq x^2$
 - Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, on obtient, à partir de l'inégalité précédente $\sqrt{x} \leq \sqrt{x^2}$, soit $\sqrt{x} \leq x$ car pour x positif $\sqrt{x^2} = x$
Ainsi $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$

Conséquence graphique :



5. Opération sur les fonctions - Sens de variation

1. fonctions $u + k$ et λu

Propriétés 11 :

u est une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel.

Les fonctions u et $u+k$ ont le **même sens** de variation sur l'intervalle I .

Démonstration : En exercice (on supposera par exemple que la fonction u est décroissante sur I)

Propriétés 12 :

u est une fonction définie sur un intervalle I et λu un nombre réel non nul.

- Si $\lambda > 0$, alors les fonctions u et λu ont le **même sens** de variation sur I
- Si $\lambda < 0$, alors les fonctions u et λu ont des sens de variation **contraires** sur I .

Démonstration : En exercice (on supposera par exemple que la fonction u est décroissante sur I)

Exemple :

- La fonction $x \mapsto x^2 - 3$ a le même sens de variation sur \mathbb{R} que la fonction carré.
- La fonction $x \mapsto -3\sqrt{x}$ est décroissante sur $[0; +\infty[$.

2. fonctions \sqrt{u} et $\frac{1}{u}$

Propriétés 13 :

u est une fonction définie sur un intervalle I tel que pour tout nombre réel x de I , $u(x) \geq 0$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$, notée \sqrt{u} , a le **même sens** de variation que u sur l'intervalle I .

Démonstration : En exercice (on supposera par exemple que la fonction u est décroissante sur I)

Propriétés 14 :

u est une fonction définie sur un intervalle I tel que pour tout nombre réel x de I , $u(x)$ garde le même signe avec $u(x) \neq 0$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{u(x)}$, notée $\frac{1}{u}$, a un sens de variation **contraire** à celui de u sur l'intervalle I .

Démonstration : En exercice (on supposera par exemple que la fonction u est décroissante sur I)