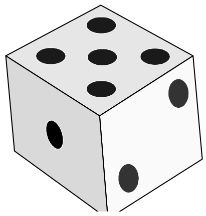
Probabilités



1. Rappels et compléments

1.1 Vocabulaire des évènements

Définition 1 :

Dans une **expérience aléatoire**, *l'univers* est l'ensemble des résultats possibles.

- Un **événement** est une partie de l'univers.
- Un événement qui ne contient aucun élément est appelé est **événement impossible**, aucun résultat ne se réalise.
- Un événement qui contient tous les éléments de l'univers est un **événement certain**.
- *Un* **événement élémentaire** est un événement possédant un seul élément.

L'événement « A **et** B », notée $A \cap B$, est la partie de l'univers qui contient les éléments appartenant à A et à B.

L'événement « A **ou** B » , notée $A \cup B$, est la partie de l'univers qui contient les éléments appartenant à A ou à B.

Des événements A, B sont *incompatibles*, si et seulement si :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \text{ ce qui équivaut à } p(A \cap B) = \emptyset.$$

L'événement *contraire* d'un événement A , noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de n'appartenant pas à A.

1.2 Probabilité d'un événement

Définition 1 :

Dans une expérience aléatoire, l'***univers*** $\Omega = \{\omega_1;\omega_2;\omega_3;\omega_4;...;\omega_n\}$ est l'ensemble de toutes les issues possibles.

Définir une ***loi de probabilité*** sur Ω, c'est associer à chaque issue ω_i un nombre p_i **positif ou nul** de telle façon que $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$. Ce nombre p_i est appelé ***probabilité*** de l'issue ω_i.

Définition 2
Soit Ω un univers fini. La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Propriétés

1 Pour tout événement A: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
2 $P(\emptyset) = 0$ $\quad$ $P(\Omega) = 1$ $\quad$ $0 \leq p(A) \leq 1$
3 Pour tous événements A et B : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Cas particulier : l'équiprobabilité

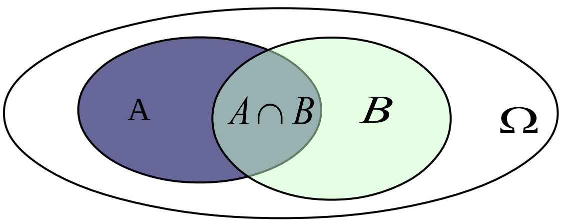
L'équiprobabilité correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Si les n événements élémentaires sont équiprobables, chacun a la probabilité

Dans le cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité, la probabilité d'un événement A, est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de résultats de } A}{\text{nombre de résultats de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas } \textit{favorables}}{\text{nombre de cas } \textit{possibles}}$$

Pour dénombrer, on utilise généralement l'un de ces trois schémas suivants:

Diagramme de Venn



Arbre des événements

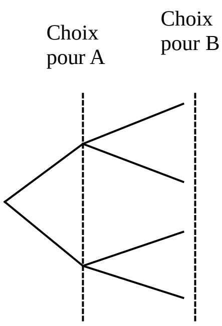


Diagramme de Caroll

Alice au pays des merveilles, c'est lui !!!!!

	$\overline{B}$	**B**
$\overline{A}$		
A		

2 Conditionnement

2.1 Probabilité d'un événement A sachant que B est réalisé

A l'épreuve pratique du permis de conduire, on a observé les résultats suivants sur un échantillon de 503 candidats se présentant pour la première fois.

Candidats	Ayant pratiqué la conduite accompagnée	N'ayant pas pratiqué la conduite accompagnée	Total
Ayant réussi à la première présentation	68	205	273
Ayant échoué à la première présentation	19	211	230
Total	87	416	503

On choisit au hasard un candidat dans cet échantillon.
On considère les événements C : « Le candidat a pratiqué la conduite accompagnée » ;
R : « Le candidat a réussi à la première présentation ».
On donnera les résultats sous forme de fractions.

1) Calculer les probabilités $p(C)$, $p(R)$, et $p(C \cap R)$.
2) Le candidat déclare qu'il a pratiqué la conduite accompagnée.
   Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu son permis à la première présentation.
   A quelle fréquence conditionnelle correspond ce résultat ?
   Expliquer pourquoi le quotient $\frac{p(C \cap R)}{p(C)}$ donne le même résultat.
3) Le candidat déclare qu'il a obtenu son permis à la première présentation.
   Déterminer la probabilité qu'il ait pratiqué la conduite accompagnée.
   A quelle fréquence conditionnelle correspond ce résultat ?
   Expliquer pourquoi le quotient $\frac{p(C \cap R)}{p(R)}$ donne le même résultat.

Définition :
Dans l'univers Ω d'une expérience aléatoire, on considère un événement B tel que $p(B) = 0$

- Pour tout événement A, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $p_B(A)$, le nombre $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.
- L'égalité précédente permet d'exprimer la probabilité de l'intersection : $p(A) = p_B(A) \times p(B)$

2.2 Représentation à l'aide d'un arbre de probabilités

Dans l'univers d'une expérience aléatoire, on considère un événement B de probabilité différente de 0 et de 1.

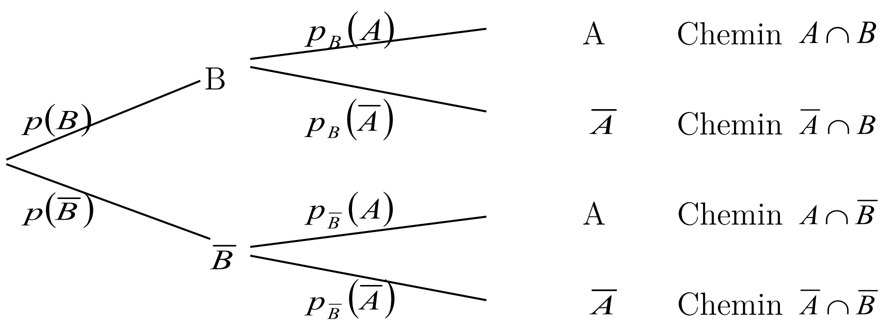
Étant donné un événement A conditionné par l'événement B, on visualise la situation à l'aide d'un arbre :

- Une branche est représentée par un segment ; chacun porte une probabilité
- Un nœud est la jonction de deux ou plusieurs branches

- Un chemin est l'événement réalisé en suivant des branches successives.

Règles

- Sur les branches du 1er niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants
- Sur les branches du 2ème niveau, on inscrit les **probabilités conditionnelles**
- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (***Loi des nœuds***).
- La probabilité d'un chemin (intersection des événements) est le produit des probabilités portées sur ses branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.



3. Formule des probabilités totales

Définition

Dire que des événements forment une partition de l'ensemble E des issues signifie qu'ils sont deux à deux disjoints et que leur réunion est E.

Si B est un événement, alors B et $\overline{B}$ forment une partition de E car $B \cap \overline{B} = \emptyset$ et $B \cup \overline{B} = E$

Formule des probabilités totales

Les événements $B_1, B_2, ..., B_n$ forment une partition de E.

Alors pour tout événement A:

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + ... + p(B \cap A_n)$$

Dans le cas général, $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$

On a : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ ou $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$

4. Indépendance de deux évènements

Définition: Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Propriété: A est un évènement de probabilité non nulle.
A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B) = p(B)$