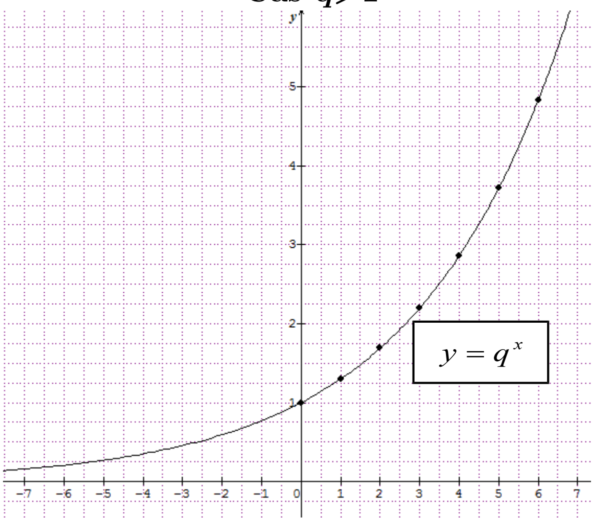
# 6.Fonctions exponentielles

## 1. Les fonctions exponentielles $x \to q^n$ avec $q > 0$

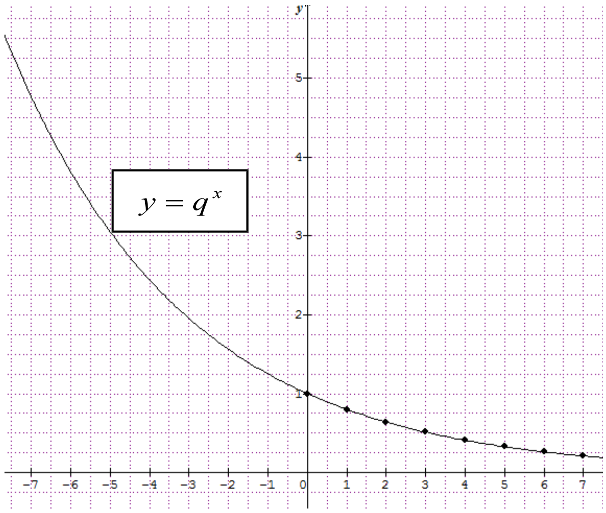
### 1. Définition :

La fonction $x \mapsto q^x$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative est obtenue en reliant par une ligne continue et régulière les points de coordonnées $(n, q^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ .
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle de base *q***.

**Cas $q>1$**




**Cas $q < 1$**




<u>Points</u> : représentation graphique de la suite $(q^n)$
<u>Courbe</u> : représentation graphique de la fonction $x \mapsto q^x$

### 2. Dérivabilité

***<u>Proposition 1 :</u>*** On admet que les fonctions $x \mapsto q^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

<u>Conséquences</u> : ces fonctions sont donc continues sur $\mathbb{R}$ et admettent une tangente en chaque point.

### 3. Relation fonctionnelle

Remarque : on sait déjà que si $a$ et $b$ sont des entiers et $q>0$, $q^{a+b} = q^a \times q^b$ . On élargit cette relation pour les réels.

***Propriété 1 :*** (admise)

Pour tout nombre réel $x$ et $y$, la fonction exponentielle de base $q$ (q>0) vérifie la relation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ c'est-à-dire $q^{x+y}=q^x\times q^y$

On dit que les fonctions exponentielles transforment une somme en un produit.

***Propriété 2 : conséquences***

$q$ désigne un nombre réel strictement positif. Pour tout réels $x$ et $y$, on a

- $q^{-x}=\dfrac{1}{q^x}$
- $q^{x-y}=\dfrac{q^x}{q^y}$
- $q^x>0$
- $q^{\frac{x}{2}}=\sqrt{q^x}$ et en particulier $q^{0,5}=\sqrt{q}$
- Pour tout entier relatif $n$, $\left(q^x\right)^n=q^{nx}=\left(q^n\right)^x$ (propriété admise)

Preuves :

- $q^{-x}=\dfrac{1}{q^x}$ car $q^{x-x}=q^x\times q^{-x}$ soit $1=q^x\times q^{-x}$. Donc $q^x\neq 0$ et $q^{-x}=\dfrac{1}{q^x}$
- $q^{x-y}=q^{x+(-y)}=q^x\times q^{-y}=q^x\times\dfrac{1}{q^y}=\dfrac{q^x}{q^y}$
- $q^x>0$ car $q^{\frac{x}{2}}\times q^{\frac{x}{2}}=q^x$ donc $q^x=\left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ et un carré est toujours positif. On sait enfin que $q^x\neq 0$.
- $q^{\frac{x}{2}}=\sqrt{q^x}$ car comme $q^x=\left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ et $q^x>0$, on a $\sqrt{q^x}=\sqrt{\left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2}$.

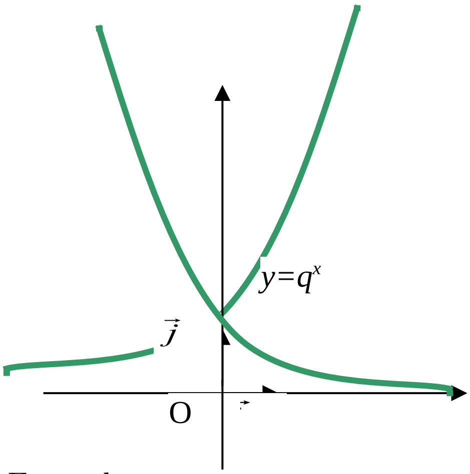
## 4. Sens de variation de la fonction exponentielle

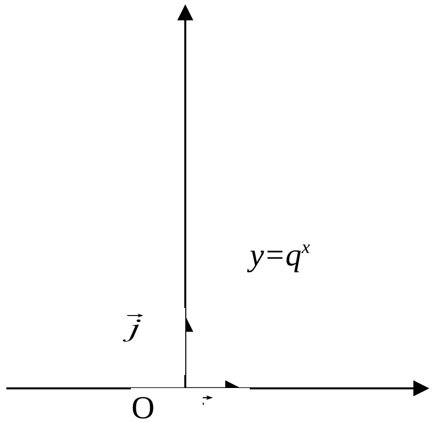
***Théorème :***

On admet que le sens de variation de la fonction $x\mapsto q^x$, définie sur $\mathbb{R}$, est le même que celui de la suite géométrique associée.

- Si $0<q<1$, la fonction $x\mapsto q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $q=1$, la fonction $x\mapsto q^x$ est constante sur $\mathbb{R}$
- Si $q>1$, la fonction $x\mapsto q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

**$0<q<1$** **$q>1$**




Exemples :

- La fonction $x \mapsto 0,9^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, car 0<0,9<1
- La fonction $x \mapsto 2,9^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car 2,9>1.

## ***2. La fonction exponentielle***

### 1. Propriété - définition

Il existe une unique fonction $x \mapsto q^x$ qui admet pour nombre dérivé 1 en 0.
On note $e$ la base de cette fonction exponentielle et $e \approx 2{,}718$
On dit que la fonction exponentielle de base $e$ est la fonction exponentielle. Elle se note : exp : $x \mapsto q^x$

**Conséquences**

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et son nombre dérivé en 0 est 1 : $\exp'(0) = 1$
- $\exp(0) = e^0 = 1$ $\quad \exp(1) = e^1 = e$ $\quad \exp(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ $\quad \exp(0{,}5) = e^{0{,}5} = \sqrt{e}$
- Pour tout nombre réel $x$, $e^x > 0$
- La fonction exponentielle est strictement croissant car $e > 0$

***Propriétés algébriques :***

Elles se déduisent immédiatement des propriétés des fonctions $x \mapsto q^x$ :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x} \qquad \left(e^x\right)^n = e^{nx}$$

### 2. Dérivée de la fonction exponentielle

***Propriété :***

La fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée. Ainsi pour tout nombre réel $x$, $\exp'(x) = e^x$

Démonstration :

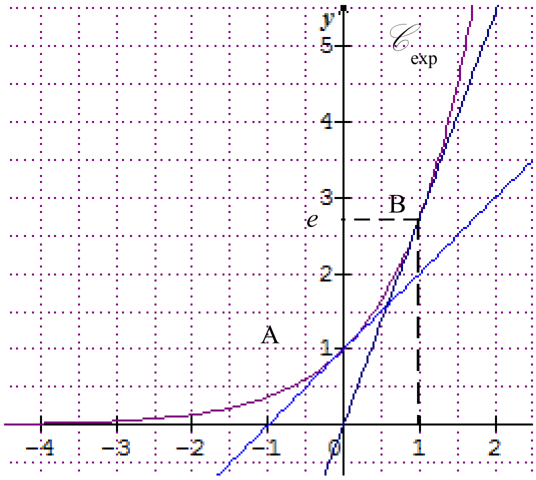
$a$ désigne un nombre réel. Le nombre dérivé en $a$ de la fonction exponentielle est la limite quand $h$ tend vers 0 de $t(h) = \dfrac{\exp(a+h) - \exp(a)}{h} = \dfrac{e^{a+h} - e^a}{h} = \dfrac{e^a e^h - e^a}{h} = e^a\left(\dfrac{e^h - 1}{h}\right)$.

On sait que $\exp'(0) = 1$, c'est-à-dire que la limite quand $h$ tend vers 0 du quotient $\dfrac{e^h - 1}{h}$ est égale à 1. On en déduit que la limite quand $h$ tend vers 0 de $t(h)$ est $e^a$.

## 3. Courbe représentative

- Tableau de variation de la fonction exponentielle

| $x$ | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $(e^x)' = e^x$ | | + | | |
| $e^x$ | 0 ↗ | 1 ↗ | $e$ ↗ | $+\infty$ |




- Equation de la tangente $T_0$ à C au point A(0 ;1)

$\exp'(0) = 1$ donc $T_0$ : $y = 1(x-0)+1$ soit $y = x+1$

- Equation de la tangente $T_1$ à C au point B(1 ;$e$)

$\exp'(1) = e$ donc $T_1$ : $y = e(x-1)+e$ soit $y = ex$

***Propriété :***

- Pour tout réel $a$ et $b$, $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- Pour tout réel $a$ et $b$, $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

Applications : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$e^x = 0 \qquad e^{1-5x} > e \qquad e^{0,1x^2} < 1 \qquad e^{4x+2} = -1 \qquad e^{2x-3} = e^{-4x} \qquad e^{2x} = \dfrac{1}{e^{3x+5}}$

# ***3. La fonction*** $x \mapsto e^{u}(x)$

Notation : $u$ désigne une fonction définie sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto exp(u(x))$ définie sur I est notée $e^u$.

### 1. **Fonction dérivée**

Propriété (admise) : SI la fonction $u$ est dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout nombre réel $x$ de I : $(e^u)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

**Conséquence :**

Les fonctions $u$ et $e^u$ ont le même sens de variation sur l'intervalle I.

**Exemple :** Déterminer la dérivée de $f(x) = e^{4x-2}$. En déduire les variations de $f$

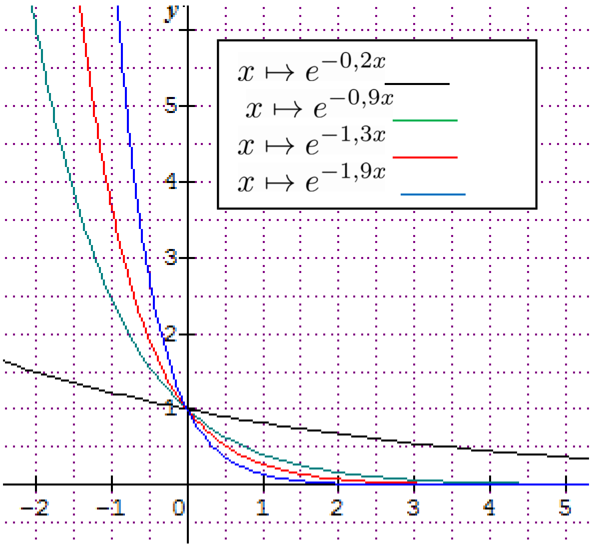
## 2. Primitives

On a vu au paragraphe précédent que $\exp'(x) = e^x$. Par conséquent, les primitive de $x \mapsto e^x$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x + C$ ($C$ étant une constante réelle quelconque).

> ***Propriété*** (admise) :
> Si sur un intervalle une fonction $f$ est telle que $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$, alors les primitives F de $f$ sur I sont définies par $F(x) = e^{u(x)} + C$ ($C$ étant une constante réelle quelconque)

***Exemple :*** Déterminer la primitive de $f(x)=e^{3x+2}$.

## 3. Exemples types




- Les fonctions : $f_k : x \mapsto e^{-kx}$ avec $k$ un nombre réel strictement positif.
  Ces fonctions sont de la forme $e^u$ avec $u = -kx$.
  Elles sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel $x$ :
  $f_k'(x) = -ke^{-kx}$ d'où $f_k'(x) < 0$
  Les fonctions $f_k$ avec $k>0$ sont donc strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_k'$ | | - | |
| $f_k$ | $+\infty$ | 1 | 0 |

Pour tout $k>0$, les courbes représentatives des fonctions $f_k$ passent par 1.

- Les fonctions $g_k : x \mapsto e^{-kx}$ avec $k$ un nombre réel strictement positif.

Ces fonctions sont de la forme $e^u$ avec $u = -kx^2$.
Elles sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel $x$ :
$g_k'(x) = -2kxe^{-kx^2}$. Or $2kxe^{-kx^2} > 0$ d'où $g_k'(x)$ est du signe de $-x$.
Les fonctions $g_k$ avec $k>0$ sont croissante sur $]-\infty;0]$ et décroissantes sur $[0;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_k'$ | | + | 0 | - | |
| $g_k$ | 0 | $\nearrow$ | 1 | $\searrow$ | 0 |

Pour tout $k>0$, les courbes représentatives des fonctions $g_k$ admettent l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
En effet, deux nombres réels opposés ont la même image par ces fonctions.