Lois à densité

On considère une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité.

1. Variable aléatoire continue

Définition 1 :
Une variable aléatoire continue X est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

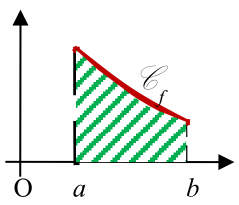
Exemple : la variable aléatoire égale à la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent (produit en grande série) est une variable aléatoire continue.

2. Loi de probabilité à densité

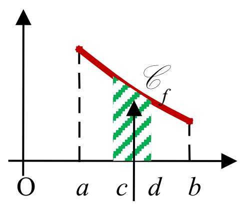
Définition 2 :
X est une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I et *f* est une fonction continue, positive sur I telle que :

- $\int_a^b f(t)dt = 1$ si $I = [a;b]$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt = 1$ si $I = [a;+\infty[$

Dire que P est la loi de probabilité de densité *f* de X signifie que pour tout intervalle J inclus dans I, $P(X \in J)$ est égale à l'aire du domaine $\{M(x;y); x \in J \text{ et } 0 \le y \le f(x)\}$



$P(a \le X \le b) = 1$



$P(c \le X \le d)$

Conséquences :

(1) Pour tout nombre réel *c* de I, $P(X = c) = 0$

En effet, $P(X = c) = P(c \le X \le c) = \int_c^c f(t)dt = 0$

(2) On déduit immédiatement de (1) que :

$$P(c \le X \le d) = P(c < X \le d) = P(c \le X < d) = P(c < X < d)$$

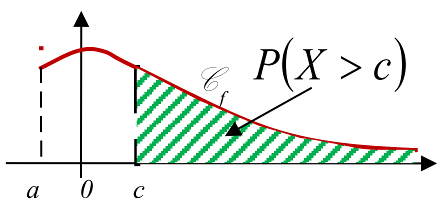
Aussi note-t-on parfois $(c;d)$ l'intervalle de borne *c* et *d*

(3) Si J= $(c;d)$, alors $P(X \in J) = \int_c^d f(t)dt$

En effet, on sait que l'aire du domaine $\{M(x;y); x \in (c;d) \text{ et } 0 \le y \le f(x)\}$ est égale, en unités d'aire, à $\int_c^d f(t)dt$

(4) Si $I =]a;+\infty[$ et si *c* est un nombre réel tel que $c > a$:

$$P(X > c) = 1 - P(a < X \le c) = 1 - \int_a^c f(t)dt$$



Remarque :
Les propriétés des probabilités d'événements rencontrées dans le cas discret s'étendent naturellement au cas continu. Par exemple :

- Si J' est le complémentaire de J dans I, alors $P(J') = 1 - P(J)$
- Si $I' \subset I$ et $P(I') \neq 0$, si $J \subset I$, alors $P_{I'}(J) = \dfrac{P(I' \cap J)}{P(I')}$

3. La loi uniforme sur [a ;b]

1. Définition et propriétés

Définition :
A et *b* désignent deux nombre réels distincts.
Dire qu'une variable aléatoire *X* suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ signifie que la densité de probabilité de la loi *X* est une fonction constante sur $[a;b]$.

Propriété :
La densité de probabilité de la loi uniforme sur $[a;b]$ est la fonction *f* définie sur $[a;b]$ par $\dfrac{1}{b-a}$

Preuve :
f est une fonction constante sur $[a;b]$ définie par $f(x) = \lambda$
On doit donc avoir $\int_a^b \lambda dt = 1$ soit $[\lambda t]_a^b = 1$, c'est-à-dire $\lambda b - \lambda a = 1$ D'où $\lambda = \dfrac{1}{b-a}$

Propriété :
X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a;b]$
Pour tout intervalle $[c;d]$ inclus dans $[a;b]$, $P(c \leq X \leq d) = \dfrac{d-c}{b-a}$
Preuve :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t)dt = \int_c^d \frac{1}{b-a}dt = \left[\frac{1}{b-a}t\right]_c^d = \frac{1}{b-a}d - \frac{1}{b-a}c = \frac{d-c}{b-a}$$

Remarque :

- Par convention, choisir un nombre au hasard dans l'intervalle $[a;b]$, c'est le choisir selon la loi uniforme sur $[a;b]$
- En particulier, pour la loi uniforme sur $[0;1]$, la probabilité de choisir un nombre au hasard entre *c* et *d* (dans l'intervalle $[0;1]$) est égal à la distance entre *c* et *d*.

2. Espérance

Définition :
L'espérance d'une variable aléatoire X de densité *f* sur $[a;b]$ est le nombre réel $E(X) = \int_a^b tf(t)dt$
Propriété :
X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a;b]$. Son espérance est $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
Preuve :

$$E(X) = \int_a^b t\frac{1}{b-a}dt = \left[\frac{1}{b-a}\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2}{b-a} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{b-a} = \frac{1}{2}\frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

4. Loi normale centrée réduite

1. Une approche historique

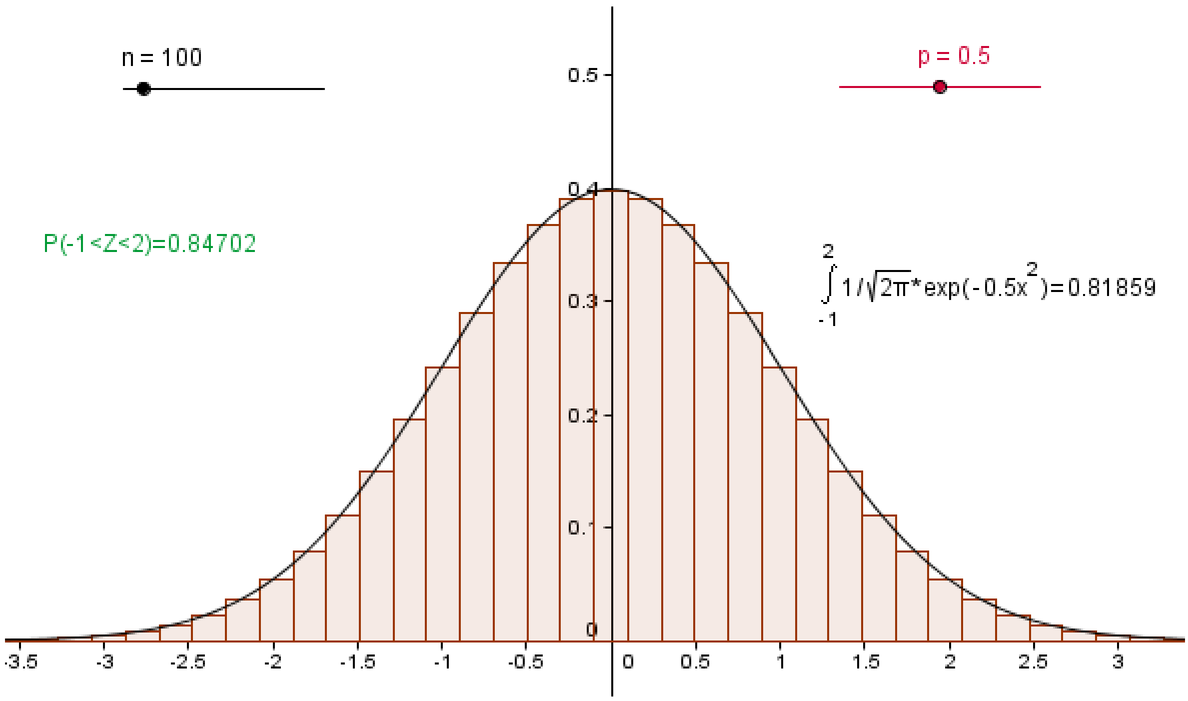
X_n est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}$(n ;p)

La variable aléatoire centrée réduite associée à X_n est $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$;

Son espérance est $E(Z_n) = 0$ et son écart type est $\sigma(Z_n) = 1$

Activité Transmaths p 216

A la loi discrète de Z_n on associe des aires de rectangles afin d'obtenir un histogramme comme ci-dessous (cas *n*=100 et *p*=0,5)



Plus *n* est grand, plus les bords supérieurs des rectangles se rapprochent d'une courbe régulière et symétrique. Le mathématicien **Abraham de Moivre (XVIIème siècle)** a découvert que cette courbe représente la fonction : $f : \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ en 1718.

Karl Friedrich Gauss étudiera par la suite cette courbe en 1809.

Ainsi $P(a \leq Z_n \leq b)$ tend vers $\int_a^b f(x)dx$ lorsque *n* tend vers $+\infty$

2. La loi normale centrée réduite

Définition :

Dire qu'une variable aléatoire T suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}$(0 ;1), signifie que sa densité de probabilité est la fonction *f* définie sur 3 par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

REMARQUE : les calculatrices donnent directement $P(a \le T \le b)$. **Voir Transmaths p 225**

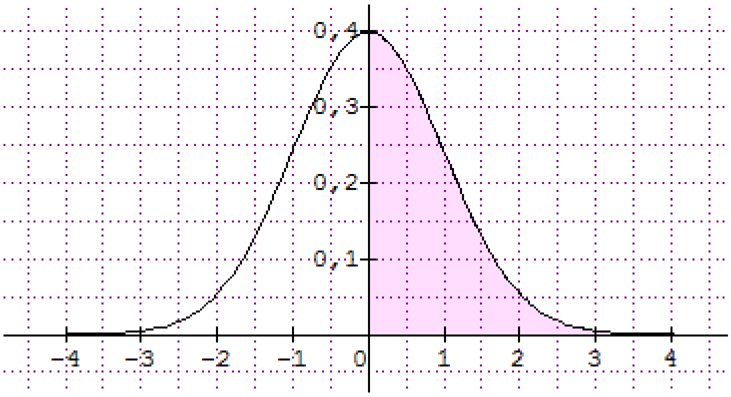
Première propriétés

(1) f est continue sur $\mathbb{R}$

(2) Pour tous nombres réels a et b, $P(a \le T \le b) = \int_a^b f(x)dx$

(3) L'aire totale sous la courbe est égale à 1 ; elle représente la probabilité $P(T \in]-\infty;+\infty[)$

(4) La courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc $P(T \in [0;+\infty[) = \frac{1}{2}$

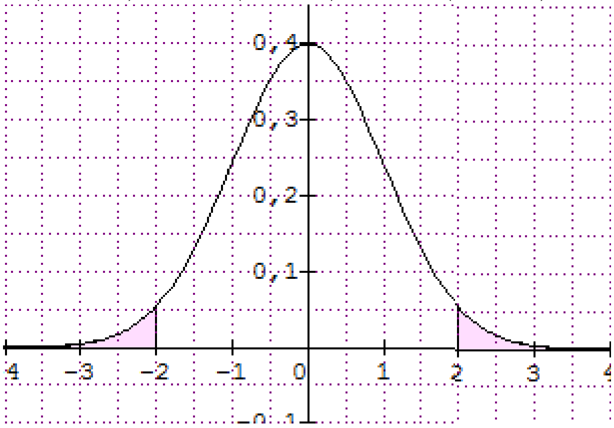


On dit que la courbe f est une « courbe en cloche »

(5) Pour tout nombre réel u :

$P(T \le u) = P(T \ge -u)$ (du fait de la symétrie)

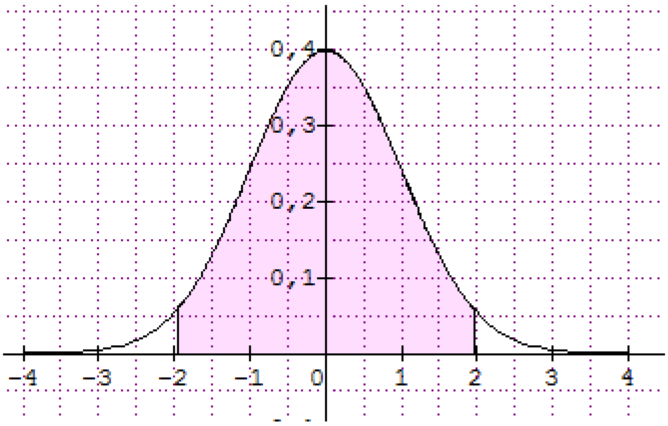
$P(T \le -u) = 1 - P(T > -u)$ donc $P(T \le -u) = 1 - P(T \le u)$



Un résultat particulier important

(6) $P(-1{,}96 \le T \le 1{,}96) \approx 0{,}95$.

Environ 95% des réalisations de T se trouvent entre -1,96 et 1,96.



5. La loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$

1. Loi normale d'espérance μ et d'écart type σ

Définition

Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ signifie que la variable aléatoire $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$

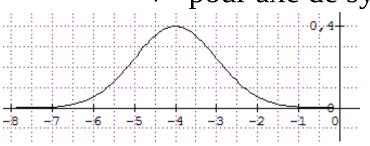
Propriétés (admises)

Si une variable aléatoire suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$, alors son espérance est μ, sa variance est σ² et son écart-type est σ.

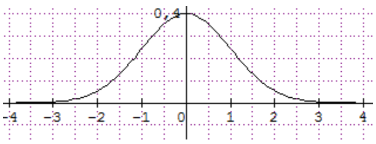
Remarque : Une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ est une loi à densité, donc il existe une fonction *g* définie sur 3 telle que pour tous nombres réels *a* et *b* $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b g(x)dx$ (ces fonctions ne sont pas au programme)

2. Influence des paramètres

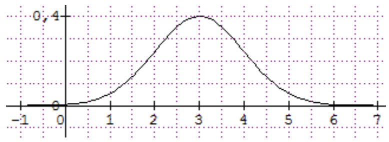
- Courbe représentative de la fonction de densité lorsque σ=1 : elle admet la droite d'équation $x = \mu$ pour axe de symétrie



$\mu = -4$

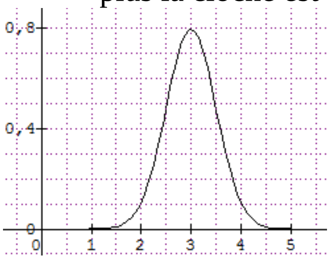


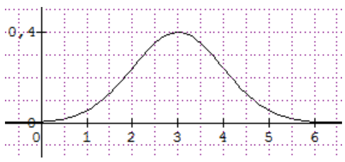
μ=0

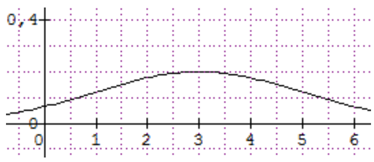


μ=3

- Courbe représentative de la fonction de densité lorsque $\mu = 3$: plus l'écart-type est grand, plus la cloche est élargie.







σ=0,5 σ=1 σ=2

3. Les intervalles « un, deux, trois sigmas »

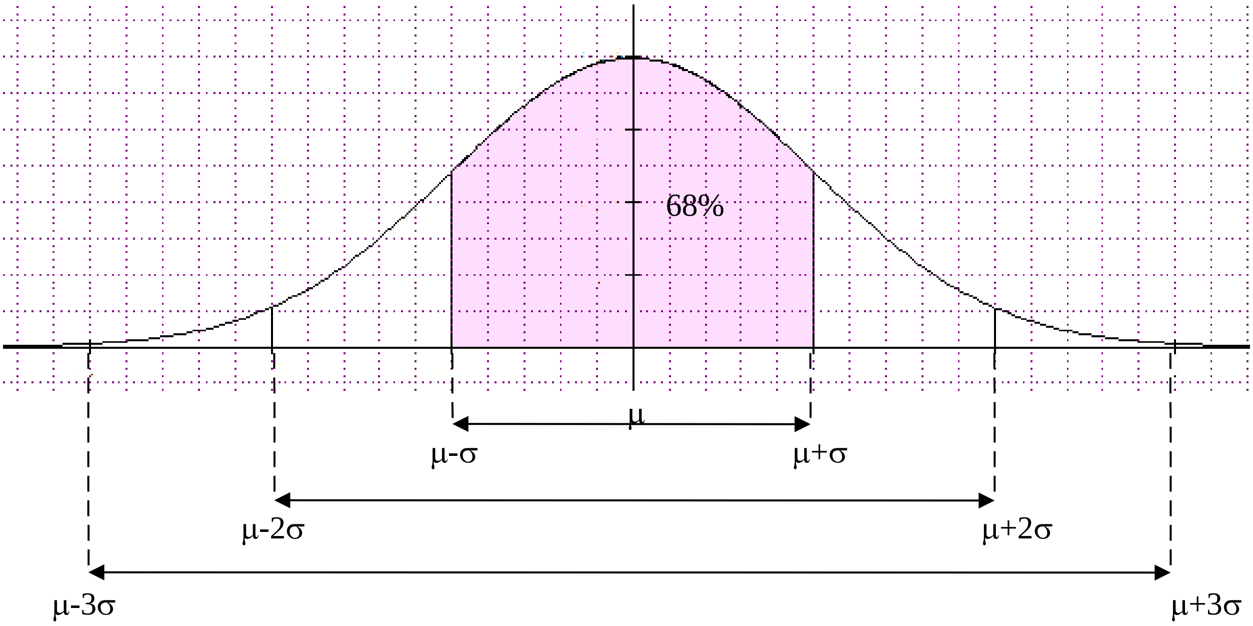
X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ et $T=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$

- $P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)=P(-1\le T\le 1)$

Avec la calculatrice, $P(-1\le T\le 1)\approx 0{,}68$ Donc $P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx 0{,}68$

- De la même façon, on détermine que $P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx 0{,}95$
- $P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx 0{,}997$

Remarque : cela signifie que la probabilité d'obtenir une valeur de X distante de plus de 3σ est presque nulle



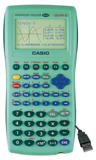
Obtenir une probabilité dans le cadre d'une loi $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ avec une calculatrice

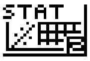
X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ et $T=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$

Pour μ et σ connus, les calculatrices disposent de commandes spécifiques pour calculer :

- La probabilité de l'événement $\{\alpha \le X \le \beta\}$, α et β donné

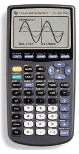
CASIO



MENU 

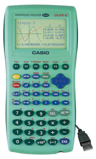
F5 (DIST) F1 (NORM) F2 (NCD); Lower: α , Upper : β , σ, μ

TEXAS

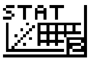


2nd Var 2: normalFRép(α , β , μ, σ)

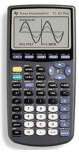
- réel x tel que $P(X \le x) = a$, a étant donné



CASIO

MENU 

F5 (DIST) F1 (NORM) F3 (InvN); Area:a, σ, μ



TEXAS

2nd Var 3: FracNormale(a, μ, σ)

Ne jamais hésiter à faire un croquis !