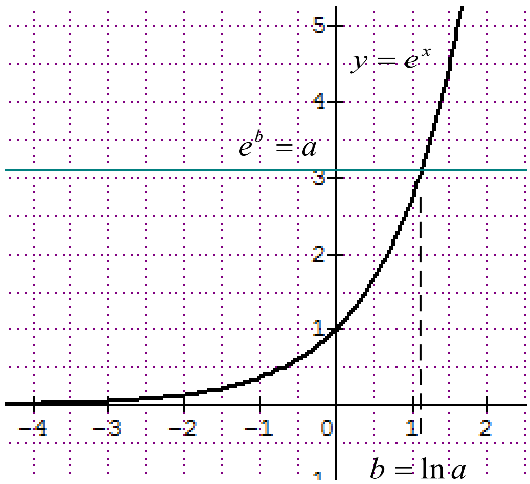
Fonction logarithme népérien

1. La fonction logarithme népérien

1. Lien avec la fonction exponentielle



On sait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur et à valeurs dans $]0;+\infty[$. Ainsi pour tout nombre réel $a > 0$, il existe un unique nombre réel b tel que $e^b = a$

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$, qui à tout nombre réel $x > 0$ associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue x.

⚠ L'écriture de $ln x$ n'a de sens que lorsque $x > 0$.

1. Conséquences

Les ***propriétés*** suivantes découlent directement de la définition ci-dessus.

(1) Pour tous nombres réels $x > 0$ et y, $\quad e^y = x$ **équivaut à** $y = \ln x$.

(2) Pour tout nombre réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$

(3) Pour tout nombre réel x, $\ln(e^x) = x$

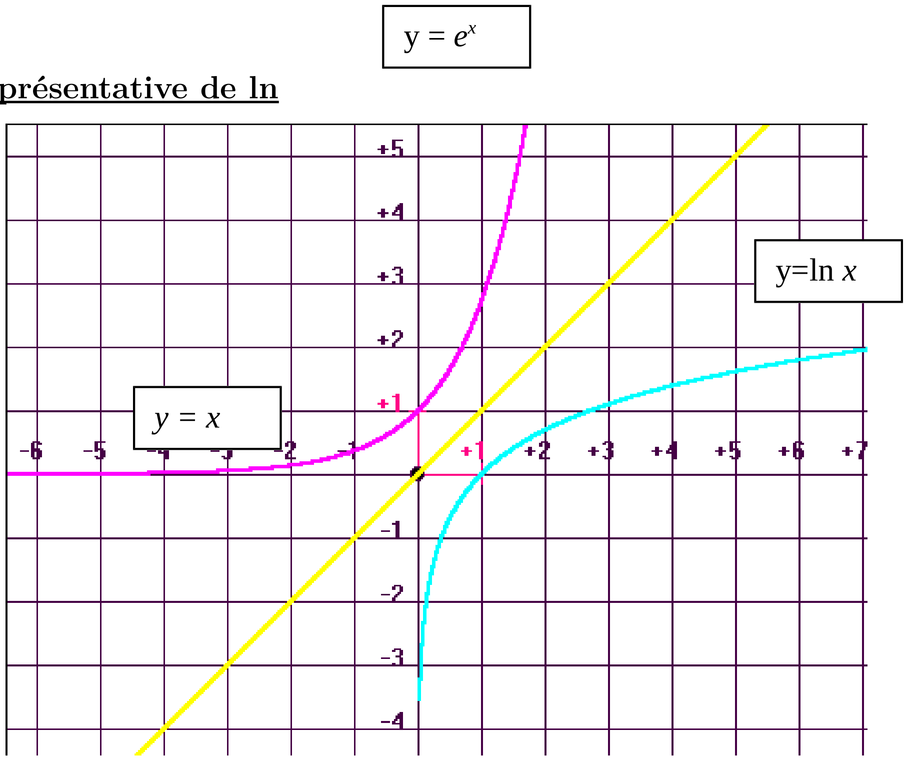
En effet, d'après la définition, $\ln(e^x)$ est l'unique solution de l'équation $e^y = e^x$ d'inconnue y, c'est-à-dire que $y = x$.

(4) $\ln 1 = 0$ (car $1 = e^0$) $\qquad \ln e = 1$ (car $e = e^1$) $\qquad \ln \frac{1}{e} = -1$ (car

$\frac{1}{e} = e^{-1}$)

2. Courbe représentative de ln

Propriété : (admise)
Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielles et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



Propriété : (admise)
La fonction logarithme népérien est **continue** et **dérivable** sur $]0;+\infty[$

1.2. Relations fonctionnelles

1. Logarithme d'un produit

Propriété 3 :
Pour tout nombres réels a et b strictement positifs : $\ln ab = \ln a + \ln b$

Démonstration :
On sait que $A = B$ équivaut à $e^A = e^B$. Prenons $a > 0$ et $b > 0$.
Posons $A = \ln(ab)$ et $B = \ln a + \ln b$.
On a $e^{\ln(ab)} = ab$ et $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$.
Comme $e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b}$, on a donc $\ln ab = \ln a + \ln b$

2. Logarithme d'un inverse

Propriété 4 :
Pour tout nombre réel a strictement positif : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

Démonstration : idée : On a $\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln(1) = 0$ et d'autre part $\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a)$

3. Logarithme d'un quotient

Propriété 5 : Pour tout nombre réel a et b strictement positif : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Démonstration

Soit a et b *deux réels strictement positifs : On a*

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$ d'après la propriété 3.

Mais $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ d'après la propriété 4. D'où $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

4. Logarithme d'une puissance

Propriété 6 :

Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout entier relatif n, on a : $\ln(a^n) = n\ln(a)$

Démonstration

- Pour $n = 0$, $\ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(a)$
- Pour $n > 0$, d'après la propriété 1 pour tout nombre a strictement positif, on a :
  $\ln a^2 = \ln(a \times a) = \ln a + \ln a = 2\ln a$
  De même, $\ln(a^3) = \ln(a \times a^2) = \ln(a) + 2\ln(a) = 3\ln(a)$
  … de proche en proche, on a $\ln(a \times a^{n-1}) = \ln a + (n-1)\ln(a) = n\ln(a)$

Pour $n < 0$, on note p l'entier tel que $p = -n$

On a : $\ln(a^n) = \ln(a^{-p}) = \ln\left(\frac{1}{a^p}\right) = -\ln(a^p) = -p\ln(a) = n\ln(a)$

5. Logarithme d'une racine carrée.

Propriété 7 :

Pour tout nombre réel a strictement positif : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Démonstration

$\sqrt{a}^2 = a$ Ainsi, $\ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2\ln(\sqrt{a})$ mais $\ln\left(\sqrt{a}^2\right) = \ln(a)$ donc $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

3. Etude de la fonction ln

1. Dérivée

Propriété :

Pour tout nombre réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

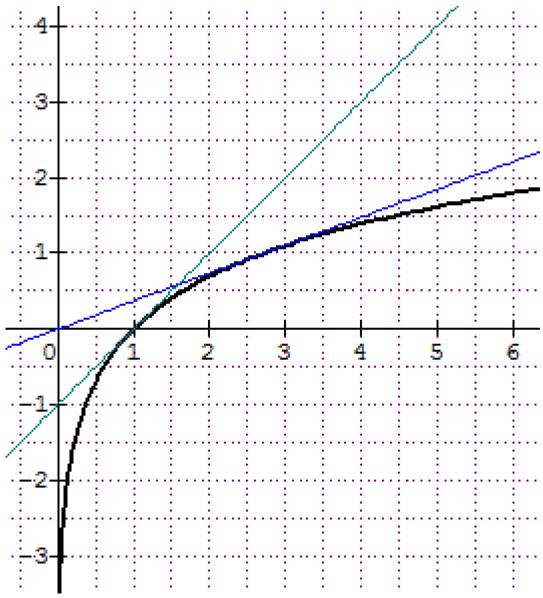
Démonstration :

On note f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=e^{\ln x}$.
Cette fonction est de la forme e^u avec $u(x)=\ln x$.
Sa dérivée est donc $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=\ln'(x)\times e^{\ln x}=\ln'(x)\times x$
Comme $f(x)=e^{\ln x}=x$, donc $f'(x)=1$
Ainsi $\ln'(x)\times x=1$, donc $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

2. Etude des variations – Courbe représentative.

Propriété :
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Preuve : Pour tout nombre réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.
Comme $\dfrac{1}{x}>0$, $\ln'(x)>0$.
Donc ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$



x	0	$+\infty$
$ln'(x)=\dfrac{1}{x}$	+	
$\ln x$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Deux tangentes particulières

- L'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1 est : $y=x-1$

  On a en effet $\ln 1=0$ et $\ln'1=\dfrac{1}{1}=1$. Donc T a pour équation $y=1(x-1)+0$ soit $y=x-1$

- L'équation de la tangente T' à la courbe C au point B d'abscisse e est : $y=\frac{1}{e}x$
- On a en effet $\ln e=1$ et $\ln' e=\frac{1}{e}$. Donc T' a pour équation $y=\frac{1}{e}(x-e)+1$ soit $y=\frac{1}{e}x$

1.3. Résolution d'équations et signe de ln

Propriété : (démontrable à partir du théorème vue dans le chapitre des fonctions exponentielles)

Pour tout réels a et b strictement positif :

$\ln a=\ln b$ ssi $a = b$.

$\ln a \geq \ln b$ ssi $a \geq b$

$\ln a \leq \ln b$ ssi $0<a \leq b$

Conséquence :

Pour tout réel x>0,

- $\ln x=0$ si, et seulement si $x=1$
- $\ln x<0$ si, et seulement si $0<x<1$
- $\ln x>0$ si, et seulement si $x>1$

D'où le tableau de signe ci-dessous :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	

Applications : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$\ln(x)=3$ $\quad$ $\ln(x)=-2$ $\quad$ $\ln(2x+3)=7$ $\quad$ $\ln x=0$ $\quad$ $\ln x=-\frac{1}{2}$

$e^{x}=4$ $\quad$ $e^{1-5x}=2$ $\quad$ $e^{0,1x^2}=1$ $\quad$ $e^{4x+2}=-1$ $\quad$ $e^{2x}=\frac{3}{7}$