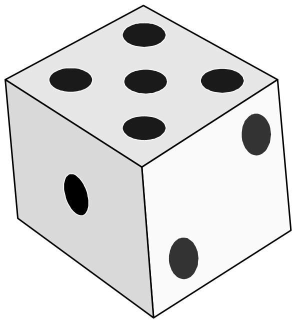
Les probabilités



1. Rappels et compléments

Rappels et compléments à photocopier et à distribuer (2 pages)

1. Loi de probabilité

Définition 1 :

Dans une expérience aléatoire, l'***univers*** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ est l'ensemble de toutes les issues possibles.

Définir une ***loi de probabilité*** sur Ω, c'est associer à chaque issue ω_i un nombre p_i **positif ou nul** de telle façon que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Ce nombre p_i est appelé ***probabilité*** de l'issue ω_i .

Exemple : On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 et on s'intéresse à sa couleur. Chacune des couleurs a les mêmes chances d'être obtenue.
On obtient la loi de probabilité définie dans le tableau :

Couleur	Coeur	Carreau	Pique	Trèfle
Probabilité	1/4	1/4	1/4	1/4

Théorème 1

Dans le cas où l'on associe à chacune des n issues d'une expérience aléatoire la même probabilité p, on parle de ***loi équirépartie*** ou de situation d'équiprobabilité.

La probabilité p_i de chaque issue x_i. est alors de $\dfrac{1}{n}$

Preuve : $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ et $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$, donc $p_1 + p_1 + \ldots + p_1 = 1$ soit $p_1 = \dfrac{1}{n}$

2. Modélisation d'une expérience aléatoire

Modéliser une expérience aléatoire dont les issues constituent l'ensemble Ω c'est choisir une loi de probabilité sur Ω qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.
Une fois le modèle retenu, on peut **simuler** cette expérience. Le lien entre les distributions de fréquence obtenues lors de ces simulations et les probabilités est donné par la loi des grands nombres.

Loi des grands nombres

Plus un échantillon est grand, c'est à dire plus le nombre d'expériences effectuées est grand, plus la fluctuation des fréquences devient faible. Les distributions de fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.

3. Espérance, variance, écart-type d'une loi de probabilité

Définition 2 :

On suppose que les résultats $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ de l'expérience sont des nombres réels et qu'une loi de probabilité est définie sur [illegible]

Espérance de la loi de probabilité : $\mu = \sum_{i=1}^{m} p_i \omega_i$

Variance de la loi de probabilité : $V = \sum_{i=1}^{m} p_i (\omega_i - \mu)^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} p_i (\omega_i)^2 \right) - (\mu)^2$

Ecart type de la loi de probabilité : $\sigma = \sqrt{V}$

Exercice : Démontrer à partir de la première écriture de la variance, la seconde.

4. Vocabulaire des évènements

Définition 3 :

Dans une **expérience aléatoire**, *l'univers* Ω est l'ensemble des résultats possibles.

- *Un* **événement** est une partie de l'univers.
- $\varnothing$ est appelé **événement impossible**, aucun résultat ne se réalise. Ω est un **événement certain**.
- *Un* **événement élémentaire** est un événement possédant un seul élément.
- L'événement « A **et** B » est la partie $A \cap B$
- L'événement « A **ou** B » est la partie $A \cup B$
- Des événements A, B *sont* disjoints, *ou* incompatibles, si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
- L'événement *contraire* d'un événement A est l'ensemble $\overline{A}$ des éléments de Ω n'appartenant pas à A.

5. Probabilité d'un événement

Définition 4

Une loi de probabilité est définie sur un ensemble Ω. La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Propriétés

- Pour tout événement A : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(\varnothing) = 0$ $P(\Omega) = 1$ $0 \leq P(A) \leq 1$
- Pour tous événements A et B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Cas particulier : l'équiprobabilité

L'équiprobabilité correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Si les n événements élémentaires sont équiprobables, chacun a la probabilité $\frac{1}{n}$

Dans le cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité, la probabilité d'un événement A, est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de résutlats de A}}{\text{nombre de résultats de}} = \frac{\text{nombre de cas } \textit{favorables}}{\text{nombre de cas } \textit{possibles}}$$

Exemple :

Le code d'une serrure est constitué d'une suite de 2 chiffres et deux lettres.

1) Combien y a-t-il de codes disponibles ?
2) Un contrôleur essaie au hasard une telle suite.
    a) Calculer la probabilité des événements suivant :
    A : « Les deux chiffres sont exacts »
    B : « Les deux lettres sont exactes »

b) Quelle est la probabilité des événements $\overline{A}$, $A \cup B$?

Exemple pour les variables aléatoires :

Tirons au hasard une boule d'une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage d'une boule, chacune des trois boules ayant, dans ce cas aussi, la même probabilité d'être choisie. On obtient ainsi un couple (x,y), où x est la 1ère boule tirée et y la seconde.

Compléter le tableau de dénombrement suivant

1er tirage / 2ème tirage	R	V	B
R			
V			
B			

2. Variable aléatoire

Voir TP introductif

1. Variable aléatoire

Définition 2 :

Ω est l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire. Définir une variable aléatoire X sur Ω consiste à associer un nombre réel à chaque résultat.

Notation

x est un nombre réel, l'événement « X prend la valeur x » est noté $(X = x)$

Exemple

Tirons au hasard une boule d'une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage d'une boule, chacune des trois boules ayant, dans ce cas aussi, la même probabilité d'être choisie.

On obtient le tableau de dénombrement suivant

1er tirage / 2ème tirage	R	V	B
R	(R, R)	(V, R)	(B, R)
V	(R, V)	(V, V)	(B, V),
B	(R, B)	(V, B)	(B, B)

D'après l'énoncé, les neuf événements élémentaires sont équiprobables : leur probabilité commune est donc $\frac{1}{9}$

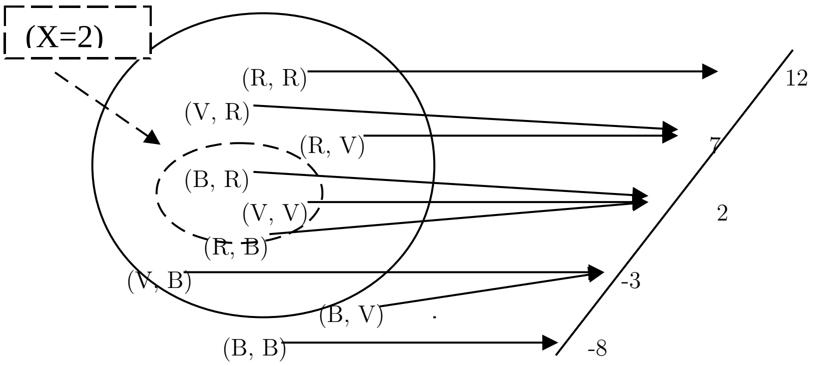
Complétons la situation précédente par une règle du jeu

Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6 €.

Pour chaque boule verte tirée, on gagne 1 €.

Pour chaque boule bleue tirée, on perd 4 €.

Soit X l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout tirage de deux boules décrit au paragraphe précédent, associe le gain ainsi obtenu ; une perte est considérée comme un gain négatif.



2. Loi de probabilité ou distribution d'une variable aléatoire

Définition 3

Une loi de probabilité est définie sur Ω.

Ω={ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ } est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.

Lorsqu'on associe à chaque valeur x_i la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, on définit une loi de probabilité sur Ω.

Remarque : on admet ici que $\sum_{i=1}^{m} P(X = x_i) = 1$

En reprenant l'exemple précédent, la loi de probabilité de X est présentée dans le tableau ci-contre

x_i	-8	-3	2	7	12
$P(X = x_i)$	1/9	2/9	1/3	2/9	1/9

3. Espérance, Variance, écart type d'une variable aléatoire

Définition 4 :

L'espérance, la variance, l'écart type d'une variable aléatoire X sont respectivement l'espérance, la variance, l'écart type de sa loi de probabilité.

Théorème 2

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est définie dans le tableau ci-dessous

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_m
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_m

Espérance : $E(X) = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{m} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{m} p_i (x_i)^2 - (E(X))^2$ soit

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Ecart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

<u>Exercice :</u> Démontrer à partir de la première écriture de la variance, la seconde.

Remarque : On peut aussi écrire $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

<u>Exemple</u>

En reprenant l'exemple précédent, E(X)=2

Remarque : Un jeu est **équitable** si l'espérance mathématique de la variable aléatoire mesurant le gain est égale à la mise. Ainsi, dans l'exemple, comme E(X) = 2, le jeu est équitable si un joueur doit payer 2 € par partie.

V(X) =

♦ *(X) =*

4. Espérance de aX+b et variance de aX

<u>Théorème 3 :</u>

Soit a et b deux réels. $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX) = a^2 V(X)$

<u>Démonstration :</u>

$$E(aX+b)=\sum_{i=1}^{p} p_i(ax_i+b)=\sum_{i=1}^{p} ap_ix_i+\sum_{i=1}^{p} bp_i=a\sum_{i=1}^{p} p_ix_i+b\sum_{i=1}^{p} p_i=aE(X)+b$$

$$V(aX)=E\left((aX-E(aX))^2\right)=E\left((aX-aE(X))^2\right)=E\left((a(X-E(X)))^2\right)=E\left(a^2(X-E(X))^2\right)$$

Ainsi $V(aX)=a^2E\left((X-E(X))^2\right)=a^2V(X)$

Activité :

Dans une entreprise le salaire moyen est de 1080 €, l'écart type est de 390 €

1) Les salaires ont augmenté de 5%. Que deviennent la moyenne et l'écart type des nouveaux salaires ?
2) Même question si les salaires ont augmenté de 50 €
3) Laquelle de ces situations provoque une plus grande dispersion des salaires ?

3. Répétition d'expériences identiques et indépendantes

1. Expériences identiques et indépendantes

Il y a **répétition d'expériences identiques** lorsque la même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois de suite

Définition 5

Deux expériences successives sont dites **indépendantes** lorsque l'issue quelconque de l'une de ces expériences ne dépend pas de l'issue de l'autre expérience.

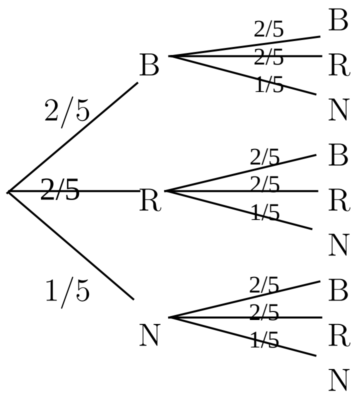
2. Modélisation d'une répétition

On représente la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré.

Exemple :

Une urne contient cinq boules indiscernables : deux bleues, deux rouges, et une noire. L'**expérience aléatoire** consiste à tirer successivement deux boules de l'urne avec remise et à noter les couleurs obtenues

Arbre pondéré



Liste des issues	Probabilité
(B ;B)	P((B ;B))=$2/5 \times 2/5 = 4/25$
(B ;R)	4/25
(B ;N)	2/25
(R ;B)	4/25
(R ;R)	4/25
(R ;N)	2/25
(N ;B)	2/25
(N ;R)	2/25
(N ;N)	1/25

Propriété :

Dans le cas d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes, une issue est une liste de résultats et la probabilité de cette liste est le **produit des probabilités** de chacun des résultats de la liste.

Table des matières