AP Suites et fonctions

1) Etudier une suite récurrente

u est la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout nombre entier naturel n,

$u_{n+1} = 1{,}4u_n - 0{,}05u_n^2$

a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1{,}4x - 0{,}05x^2$
Etudier les variations de f.

b) Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 8$

c) En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

2) Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel $n \geq 2$, $4^n \geq 4n + 1$

3) Etude de fonction :

On considère la fonction f définie sur IR \ $\{1\}$ par $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

où a, b et c sont trois nombres réels.

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$
Unités graphiques : 1 cm en abscisses et 0,5 cm en ordonnées

Partie A : Détermination de la fonction f

Déterminer les réels a, b et c sachant que :

- la courbe (C) passe par le point A(0 ;1)
- la courbe (C) passe par le point B(3 ;10)
- la courbe (C) admet une tangente horizontale au point B.

On admet que la fonction f est définie pour tout $x \neq 1$ par $f(x) = x + 5 + \frac{4}{x-1}$

Partie B : Etude de la fonction f

1) Montrer que le point I(1 ;6) est centre de symétrie pour la courbe (C).
2) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.
3) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4) Déterminer les équations des asymptotes à (C) ainsi que la position relative de l'asymptote oblique par rapport à (C).
5) On désigne par f' la fonction dérivée de f.
   Montrer que, pour tout $x \in$ IR \ $\{1\}$; $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$
6) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f
7) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point E d'abscisse 2
8) On admet que T a pour équation réduite $y = -3x + 17$
   Déterminer les coordonnées du point du point F de la courbe (C), distinct du point E, en lequel la tangente T' est parallèle *à* T.
9) Construire la courbe, ses asymptotes, ses tangentes T et T', ainsi que les tangentes horizontales.