Logarithme Népérien

Etude de la fonct° logarithme

↳ **Continuité. Dérivabilité**

→ Thm 1 : la fct° logarithme est continue sur $]0;+\infty[$

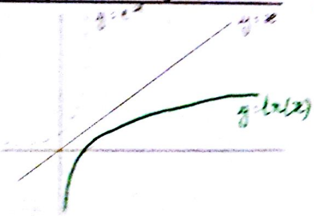
→ Thm 2 : La fct° logarithme est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fct° inverse : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

⇒ La fct° logarithme N est strict. ↗ sur IR.

↳ **Limites** • $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

↳ **Tableau de variat° + représentat° graphique**

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
ln	$-\infty$ ↗	$+\infty$



↳ **Conséquences**

→ La fct° log N étant strict. ↗ sur $]0;+\infty[$, on en déduit que quels que soient $a, b > 0$:

• $a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$ • $a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$

• $0 < a < 1 \Leftrightarrow \ln(a) < 0$ • $a > 1 \Leftrightarrow \ln(a) > 0$

Résultats complémentaires

↳ **Approximat° affine au voisinage de 1** :

• $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

↳ **Croissances comparées**

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ • $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$

↳ **Dérivées** • u fct° dérivable sur I et $u(x) > 0$ alors $f(x) = \ln(u(x))$ dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

• u fct° dérivable sur I et $u(x) \neq 0$, alors $f(x) = \ln(|u(x)|)$ dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Avec la fonction exponentielle

↳ **Définition**

→ Le logarithme népérien d'un réel $a > 0$ est le réel b, unique solution de l'équation $e^b = a$. On le note $\ln(a)$

→ La fct° logarithme népérien est la fct° qui à tt réel $x > 0$ associe le réel $\ln(x)$. On a donc l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

→ La fct° ln est définie sur $]0;+\infty[$

↳ **Conséquences**

⇒ • $\ln(1) = 0$ • $\ln(e) = 1$

• Pr tt réel x : $\ln(e^x) = x$

• Pr tt réel $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$

Logarithme décimal

Propriétés algébriques

↳ **Relation fonctionnelle**

→ Quels que soient les réels $a, b > 0$:

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

↳ **Conséquences**

→ Quels que soient les réels $a, b > 0$.

• $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ • $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

• $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

• (pr tt entier relatif n) $\ln(a^n) = n\ln(a)$