Comportement global d'une suite

ex 1 Etudier la monotonie de la suite u en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1) $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$

3) $u_n = 4^n$ 4) $u_n = n^2 + 2n$

5) $u_{n+1} = \left(u_n + \dfrac{1}{2}\right)^2$

---

1) $u_{n+1} = u_n - 3$ donc
$u_{n+1} - u_n = -3 < 0$
ainsi (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$

2) $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n^2}$ donc
$u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{n^2}$ or $n > 0$
ainsi (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$

3) $u_{n+1} - u_n = 4^{n+1} - 4^n = 4^n \times 4 - 4^n$
$= 4^n(4-1) = 3 \times 4^n > 0$
ainsi (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

4) $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1)$
donc $u_{n+1} - u_n =$
$n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 - n^2 - 2n =$
$2n + 3$
or $n \geq 0$ donc $2n + 3 > 0$ ainsi
$u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Par conséquent, (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

5) $u_{n+1} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 = u_n^2 + u_n + \frac{1}{4}$
donc $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{1}{2}$
or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \geq 0$ et $\frac{1}{2} > 0$
donc $u_n^2 + \frac{1}{2} > 0$ et ainsi $u_{n+1} + u_n > 0$.
(u_n) est donc strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

---

ex 2 Après avoir justifié que la suite v est strictement positive, étudier sa monotonie en comparant $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1.

1) $v_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour $n \geq 1$

2) $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n \end{cases}$ 3) $v_n = \dfrac{5}{8^n}$

4) $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3 v_n^3 + v_n \end{cases}$ 5) $v_n = 2n \times 4^{-n}$ pour $n \geq 1$

6) $v_n = \dfrac{4 \times 3^{2n}}{5^{n-3}}$

---

1) Pour tout $n \geq 1$ $2^n > 0$ et $n > 0$
donc $v_n > 0$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2^n \times 2 \times n}{(n+1)2^n}$$

$= \dfrac{2n}{n+1} = \dfrac{n+n}{n+1}$ or $n \geq 1$ donc $n+n \geq n+1$

et ainsi $\dfrac{2n}{n+1} \geq 1$ et (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

2) $v_0 > 0$ or $v_1 = \frac{1}{2} v_0 > 0$ et ainsi de suite donc $v_n > 0$

(Ce n'est pas une démonstration rigoureuse, on utilisera par la suite un raisonnement plus rigoureux pour démontrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2} < 1$

ainsi (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

(on aurait pu aussi utiliser un résultat du cours sur le sens de variation des suites géométriques)

3) $5 > 0$ et $8^n > 0$ donc $v_n > 0$ sur $\mathbb{N}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{5}{8^{n+1}}}{\frac{5}{8^n}} = \frac{5}{8^n \times 8} \times \frac{8^n}{5} = \frac{1}{8} < 1$$

donc (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

4) $v_{n+1} = 3 v_n^3 + v_n$

Le raisonnement est identique à celui du 2).

$v_0 > 0$ donc $v_1 = 3 v_0^3 + v_0 > 0$ et ainsi de suite donc $v_n > 0$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3 v_n^3 + v_n}{v_n} = 3 v_n^2 + 1$$

or $3 v_n^2 > 0$ et donc $1 + 3 v_n^2 > 1$ ainsi $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ et (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$

5) $n \geq 1$ donc $2n > 0$ et $4^{-n} > 0$ ainsi $v_n > 0$.

$v_{n+1} = 2(n+1) \times 4^{-(n+1)}$

(Attention à bien mettre les ( ))

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2(n+1)\, 4^{-n-1}}{2n \times 4^{-n}}$$

$$= \frac{n+1}{n} \times 4^{-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

or $n \geq 1$ donc $\frac{1}{n} \leq 1$ et ainsi $1 + \frac{1}{n} \leq 2$ et donc

$$\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{4} \times 2 \leq \frac{1}{2} < 1$$

donc (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

6) $4 \times 3^{2n} > 0$ et $5^{n-3} > 0$ donc

$$v_n = \frac{4 \times 3^{2n}}{5^{n-3}} > 0$$

$$V_{n+1} = \frac{4\times 3^{2(n+1)}}{5^{n+1-3}} = \frac{4\times 3^{2n+2}}{5^{n-2}}$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\dfrac{4\times 3^{2n+2}}{5^{n-2}}}{\dfrac{4\times 3^{2n}}{5^{n-3}}} = \frac{4\times 3^{2n+2}}{5^{n-2}} \times \frac{5^{n-3}}{4\times 3^{2n}}$$

$$= 3^2 \times 5^{-1} = \frac{9}{5} > 1$$

donc (V_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$

---

ex3 Etudier la monotonie de la suite u en déterminant une fonction f définie sur un intervalle de type $[a;+\infty[$ avec $a>0$ telle que $u_n = f(n)$ dont on étudiera les variations.

1) $u_n = 4n - 7$
2) $u_n = n^2 - 4n + 5$
3) $u_n = n^2 - 13n + 36$
4) $u_n = \dfrac{n+2}{3n+2}$
5) $u_n = \dfrac{1}{4n}$

---

1) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 4x - 7$

Etudions les variations de f sur $[0;+\infty[$

$f'(x) = 4 > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

2) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Etudions les variations de f sur $[0;+\infty[$.

$f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

f est strictement décroissante sur $[0;2]$ et strictement croissante sur $[2;+\infty[$

Ainsi (u_n) est strictement croissante à partir du rang $n = 2$. (et décroissante pour $n \leq 2$)

3) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 13x + 36$

Etudions les variations de f sur $[0;+\infty[$.

$f'(x) = 2x - 13$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{13}{2}$

donc f est strictement décroissante sur $[0;\frac{13}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{13}{2};+\infty[$.

$\frac{13}{2}$ n'est pas une valeur entière.

(u_n) est strictement croissante à partir du rang $n = 7 > \frac{13}{2}$.

(u_n) est strictement décroissante pour $n \leq 6$.

Entre $n = 6$ et $n = 7$, il faut comparer les termes u_6 et u_7

$u_6 = -6$ et $u_7 = -6$

donc $u_6 = u_7$

- Ce résultat était prévisible compte tenu de l'axe de symétrie d'équation $x = \frac{13}{2}$ de la parabole $\mathcal{P} : y = f(x)$.

- D'une façon générale, on pourra se satisfaire de la stricte croissance de (u_n) à partir de $n = 7$, et de la simple croissance de (u_n) à partir de de $n = 6$.

---

4) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{x+2}{3x+2}$

On étudie f sur $[0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1(3x+2) - 3(x+2)}{(3x+2)^2}$$

$$= \frac{-4}{(3x+2)^2} < 0$$

donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et par conséquent (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$

5) $u_n = \dfrac{1}{4n}$ pour $n \geqslant 1$

$f(x) = \dfrac{1}{4x}$.

On étudie les variations de f sur $[1; +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{-1}{4n^2} < 0$ sur $[1; +\infty[$

donc f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et par conséquent (u_n) est strictement décroissante pour $n \geqslant 1$.

---

ex 4 Démontrer dans chacun des cas que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, n'est pas monotone.

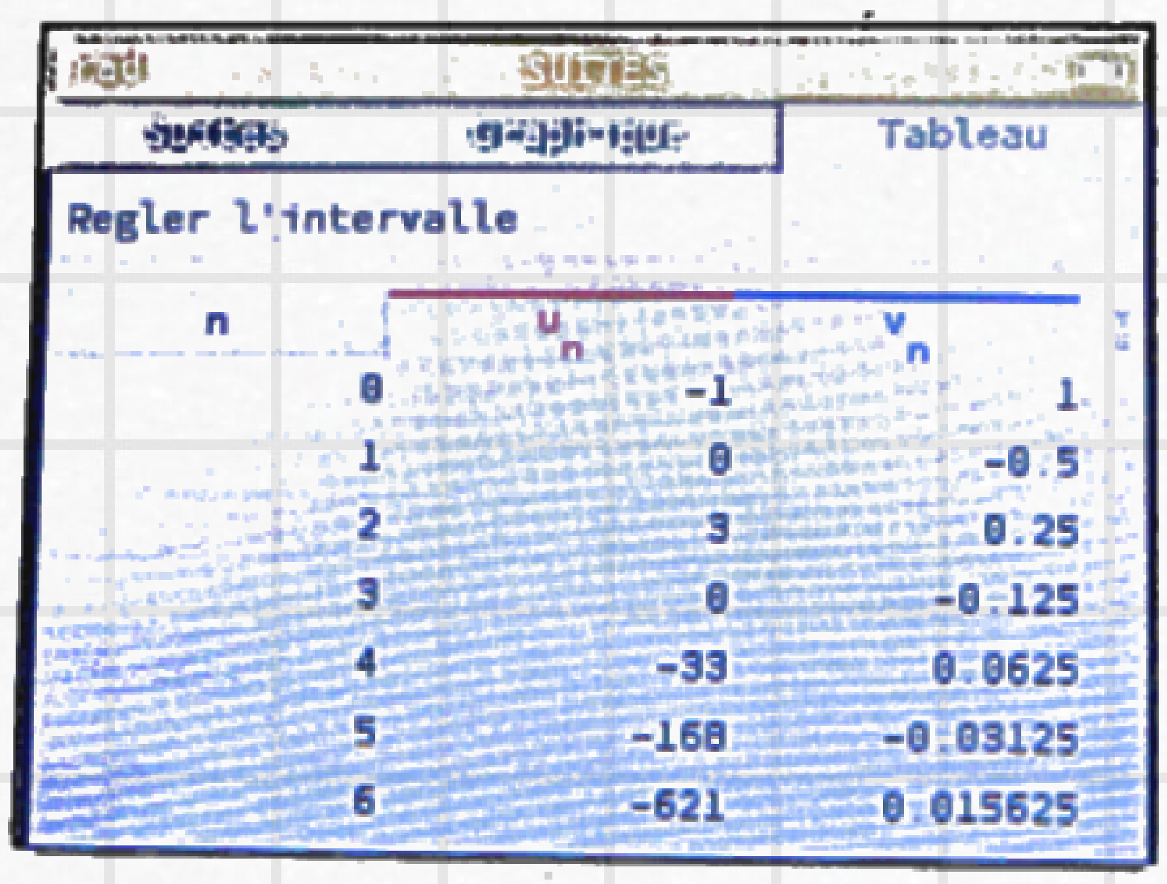
1) $u_n = 3n^2 - 3^n$

2) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

3) $\begin{cases} u_{n+1} = (u_n - 1)^2 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Dans chacun des cas plutôt que de montrer que $u_{n+1} - u_n$ change de signe, on peut utiliser un contre exemple avec la calculatrice.

1) $\to u_n$ 2) $\to v_n$


SUITES

Tableau

Regler l'intervalle

n	u_n	v_n
0	-1	1
1	0	-0.5
2	3	0.25
3	0	-0.125
4	-33	0.0625
5	-168	-0.03125
6	-621	0.015625

1) $u_1 = 0 \quad u_2 = 3 \quad u_3 = 0$

$u_1 < u_2$ mais $u_2 > u_3$

donc (u_n) n'st pas monotone

2) $u_0 = 1 \quad u_1 = -\frac{1}{2} \quad u_2 = \frac{1}{4}$

$u_0 > u_1$ mais $u_1 < u_2$

donc (u_n) n'st pas monotone

3) $u_0 = 1 \quad u_1 = 0 \quad u_2 = 1$

$u_0 > u_1$ mais $u_1 < u_2$ donc (u_n) n'st pas monotone

De plus on remarque que les termes de rangs pairs valent tous 0 et les termes de rangs impairs valent 1.

On peut écrire pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{2p} = 1 \\ u_{2p+1} = 0 \end{cases}$$

on parle dans ce cas d'une suite <u>périodique</u> de période 2 car pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = u_n$$

---

ex 5 Etudier la monotonie de la suite u en choisissant la méthode adaptée.

1) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ avec $n \geqslant 1$

2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+2} \end{cases}$

4) $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$

5) $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ pour $n \geqslant 1$

(on note $u_n = n!$, se lit factorielle n)

---

1) $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} > 0 \text{ donc}$$

(u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

2) $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 2u_n + 1 - u_n$
$= u_n^2 + u_n + 1$

. Etudions le signe de $u_n^2 + u_n + 1$
Posons $u_n = X$, ce qui revient à étudier le signe de $X^2 + X + 1$
or $\Delta = 1^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$ donc $X^2 + X + 1$ est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc
$u_n^2 + u_n + 1 > 0$ pour tout u_n et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.
ainsi (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

3) $u_0 > 0$ et $0 + 2 > 0$ donc $u_1 > 0$. Par suite tous les u_n seront strictement positifs car $n > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{n+2}}{u_n} = \frac{u_n}{n+2} \times \frac{1}{u_n} = \frac{1}{n+2} > 1$$

ainsi (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

4) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$
Etudions les variations de f sur $[1;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2 + (x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 + x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2x+1}{(x+1)^2} > 0 \text{ pour } x \geq 1$$

donc f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et par conséquent (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

5) $u_{n+1} = \underbrace{1\times2\times3\times\cdots\times n}_{u_n}\times(n+1)$.
donc $u_{n+1} = u_n \times (n+1)$
or $u_n > 0$ pour $n \geq 1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = n+1 > 1 \text{ pour } n \geq 1$$

donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

---

ex 6 Etudier la monotonie de la suite (u_n).

1) (u_n) est la suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 4$.
2) (u_n) est la suite arithmétique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = \frac{-1}{3}$

3) (u_n) est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -\frac{1}{2}$

4) (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = -4$

5) (u_n) est la suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$

Toutes les réponses s'obtiennent en utilisant les résultats du cours.

1) $r = -3 < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante

2) $r = \sqrt{2} > 0$ donc (u_n) est strictement croissante

3) $q > 1$ et $u_0 < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante

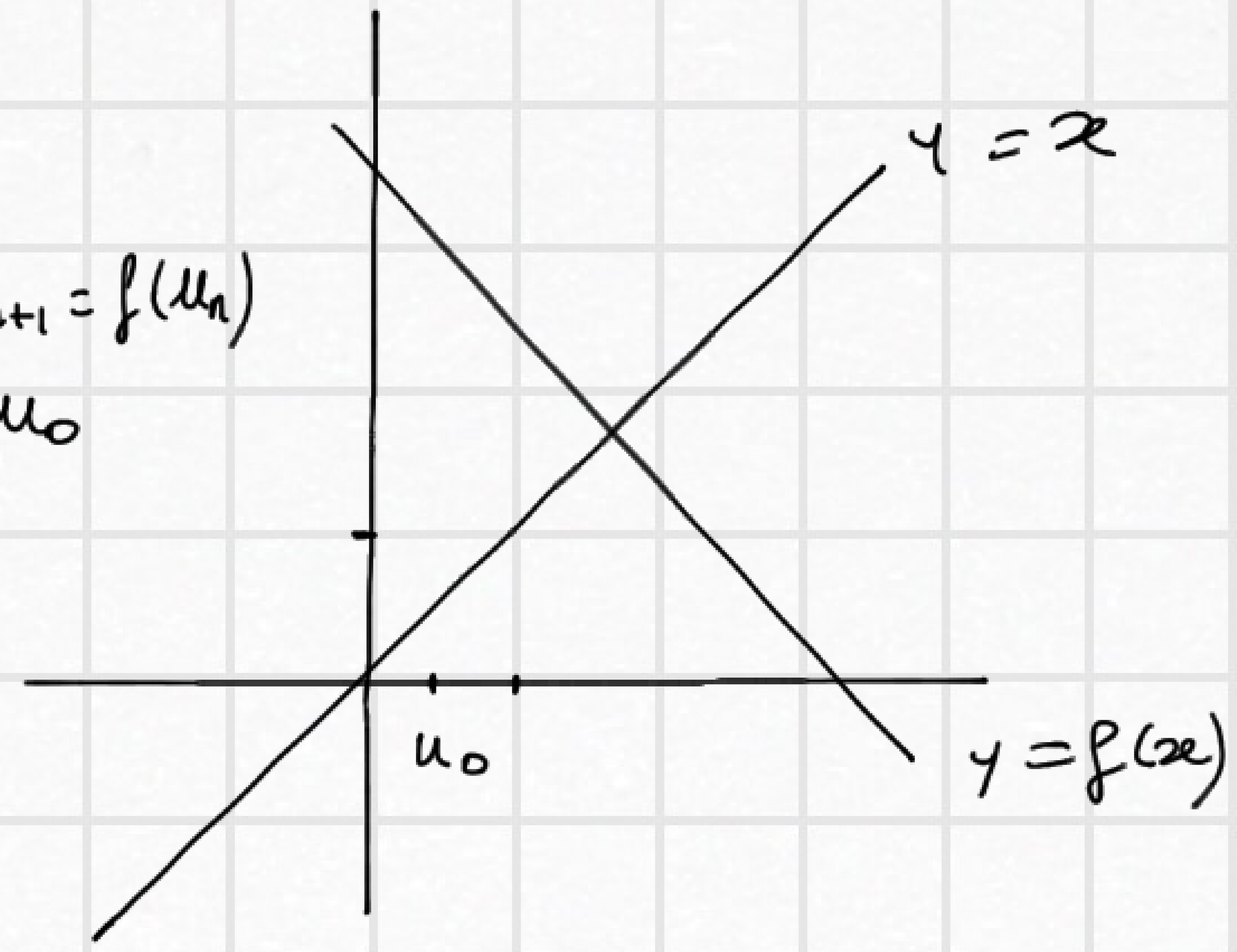
4) $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$ donc (u_n) est strictement croissante

5) $q < 0$ donc (u_n) n'est pas monotone

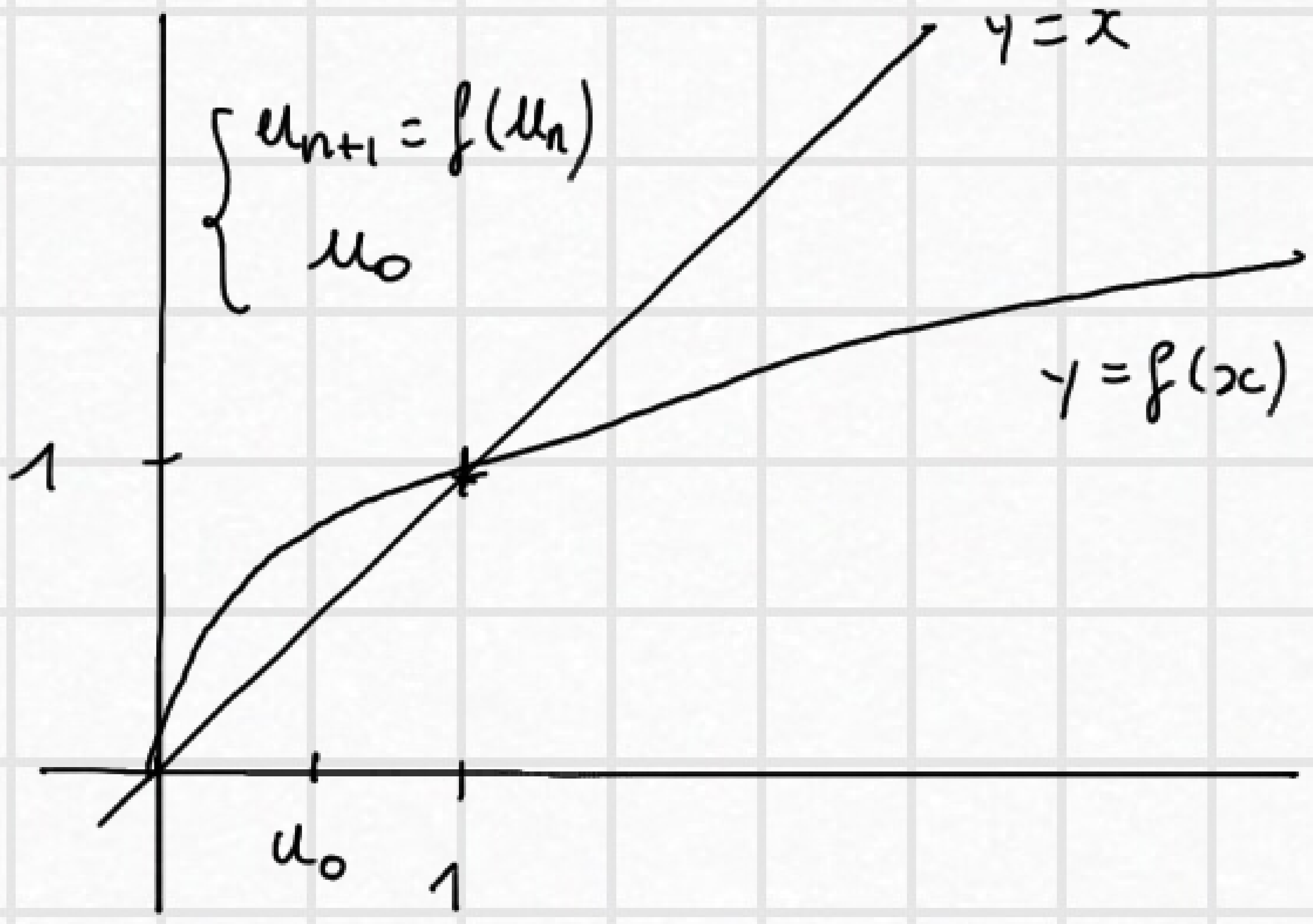
---

ex7 Par lecture graphique dire si la suite (u_n) semble monotone et si elle semble converger.

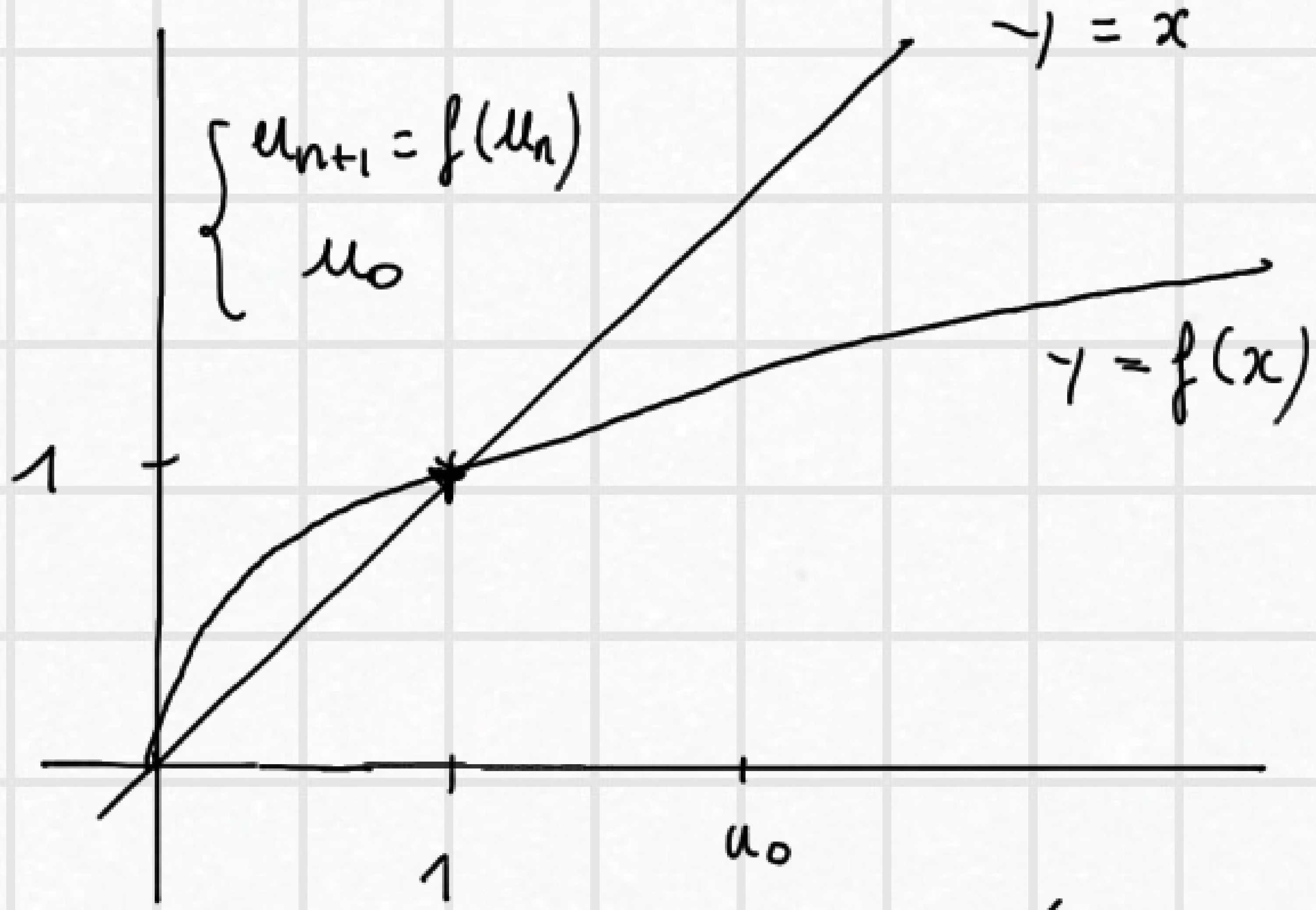
a)



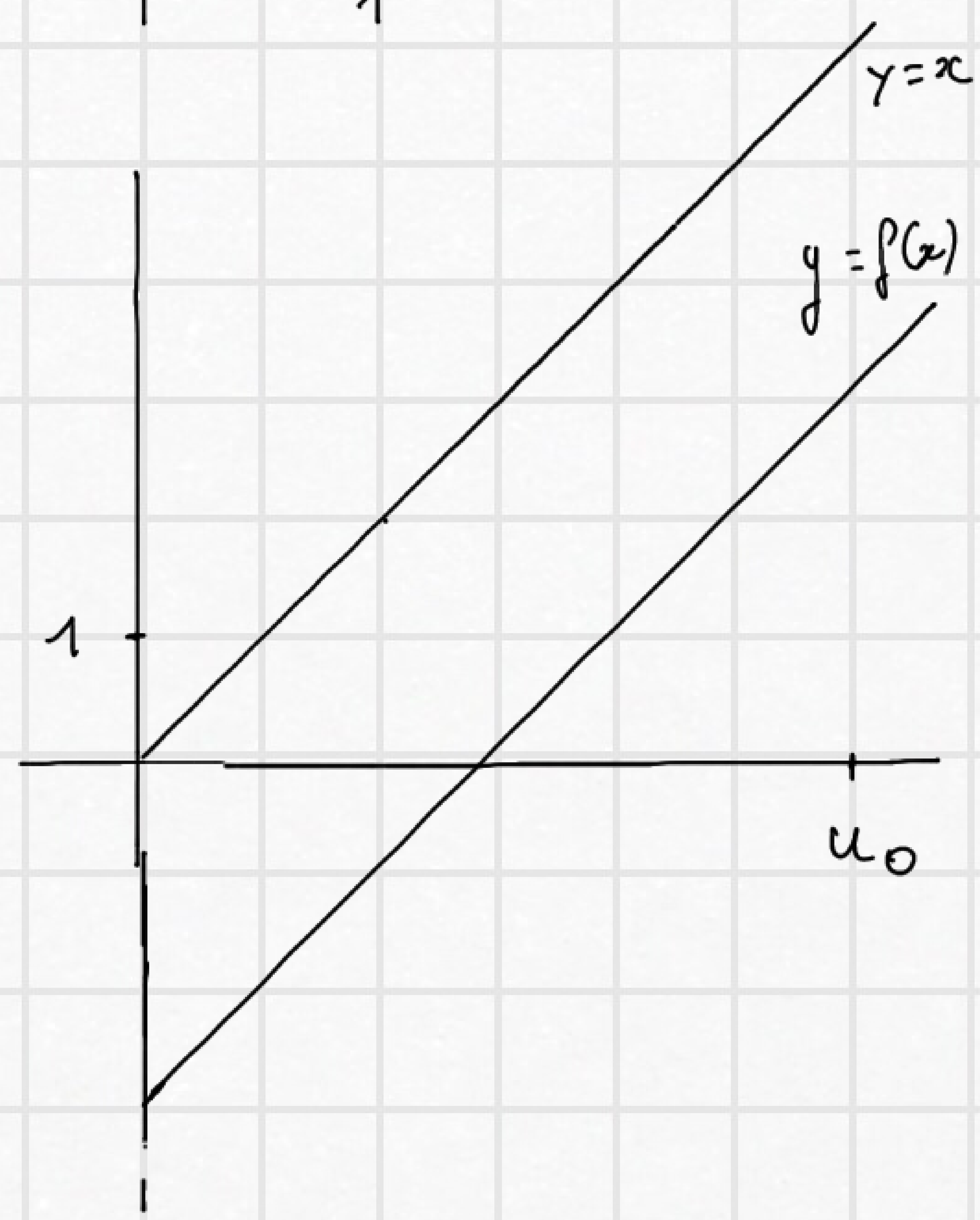
b)



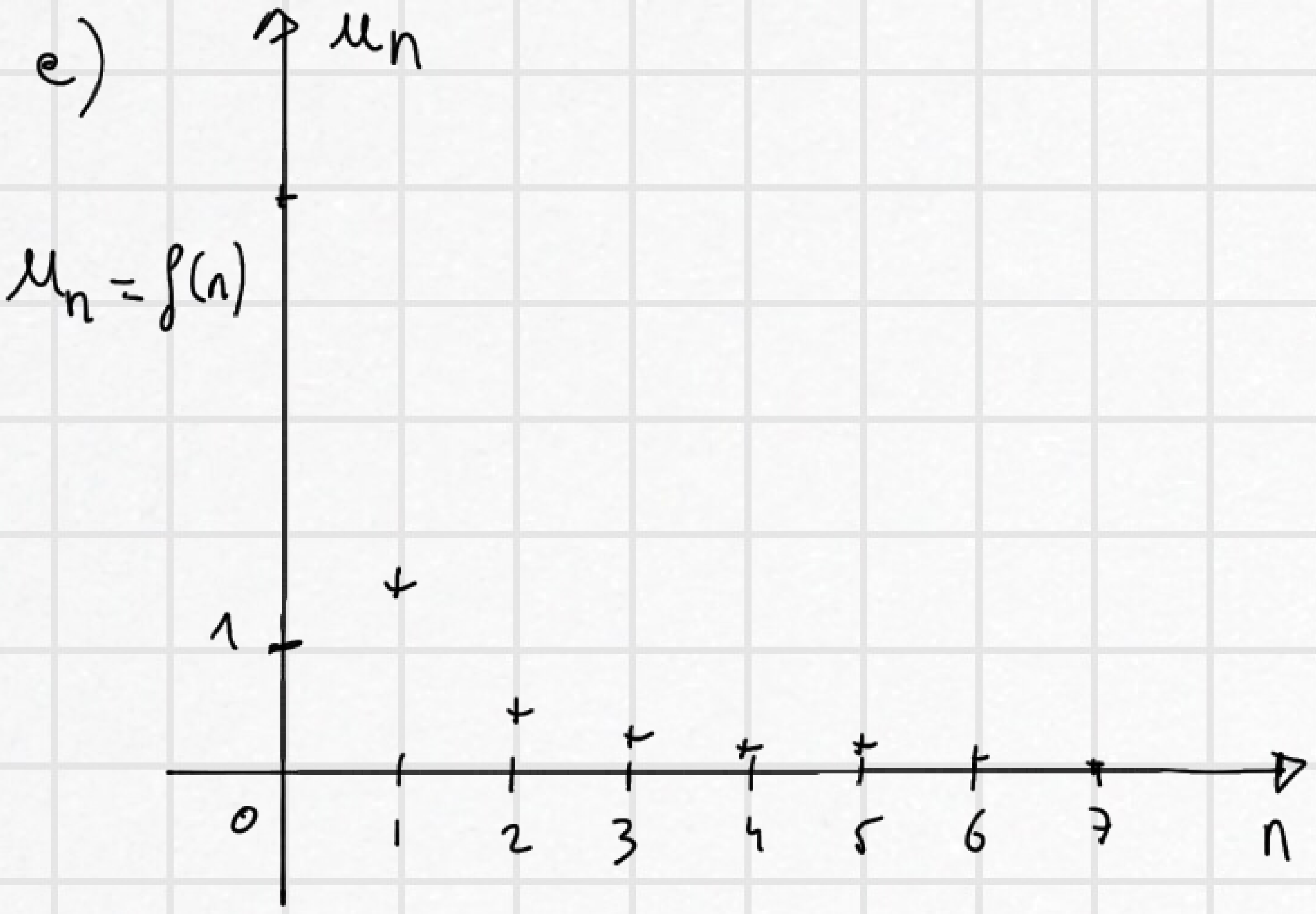
c)



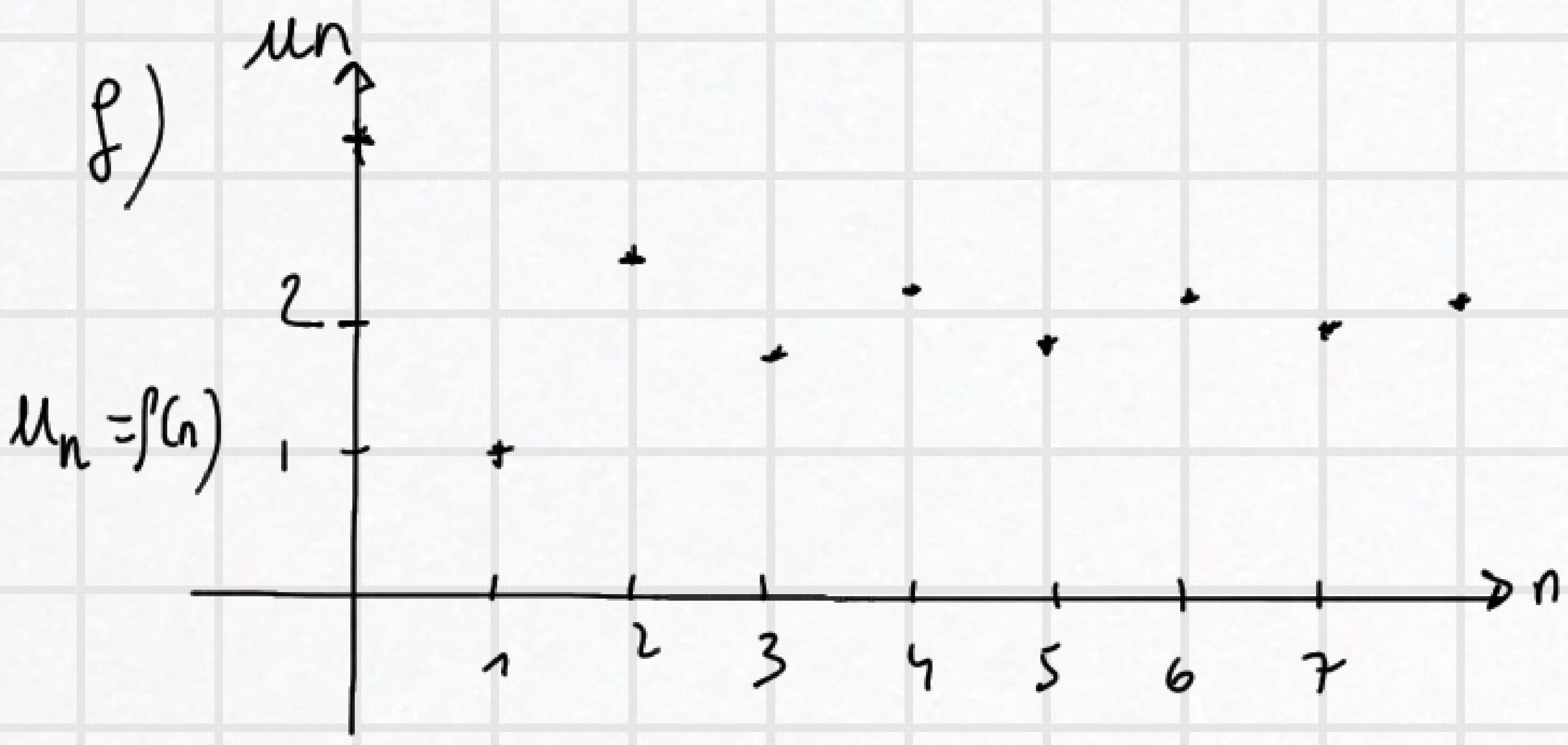
d)



e)

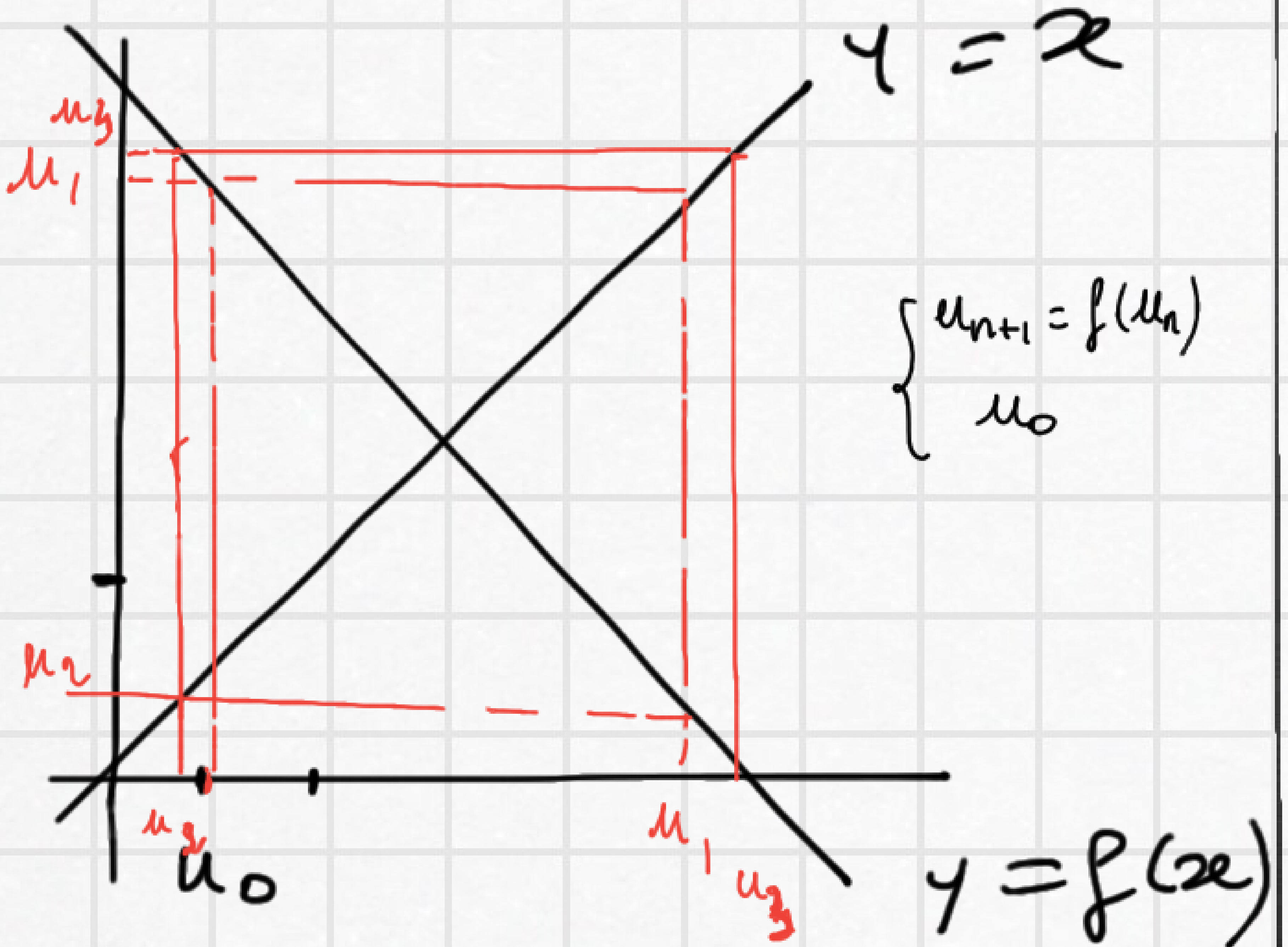


f)



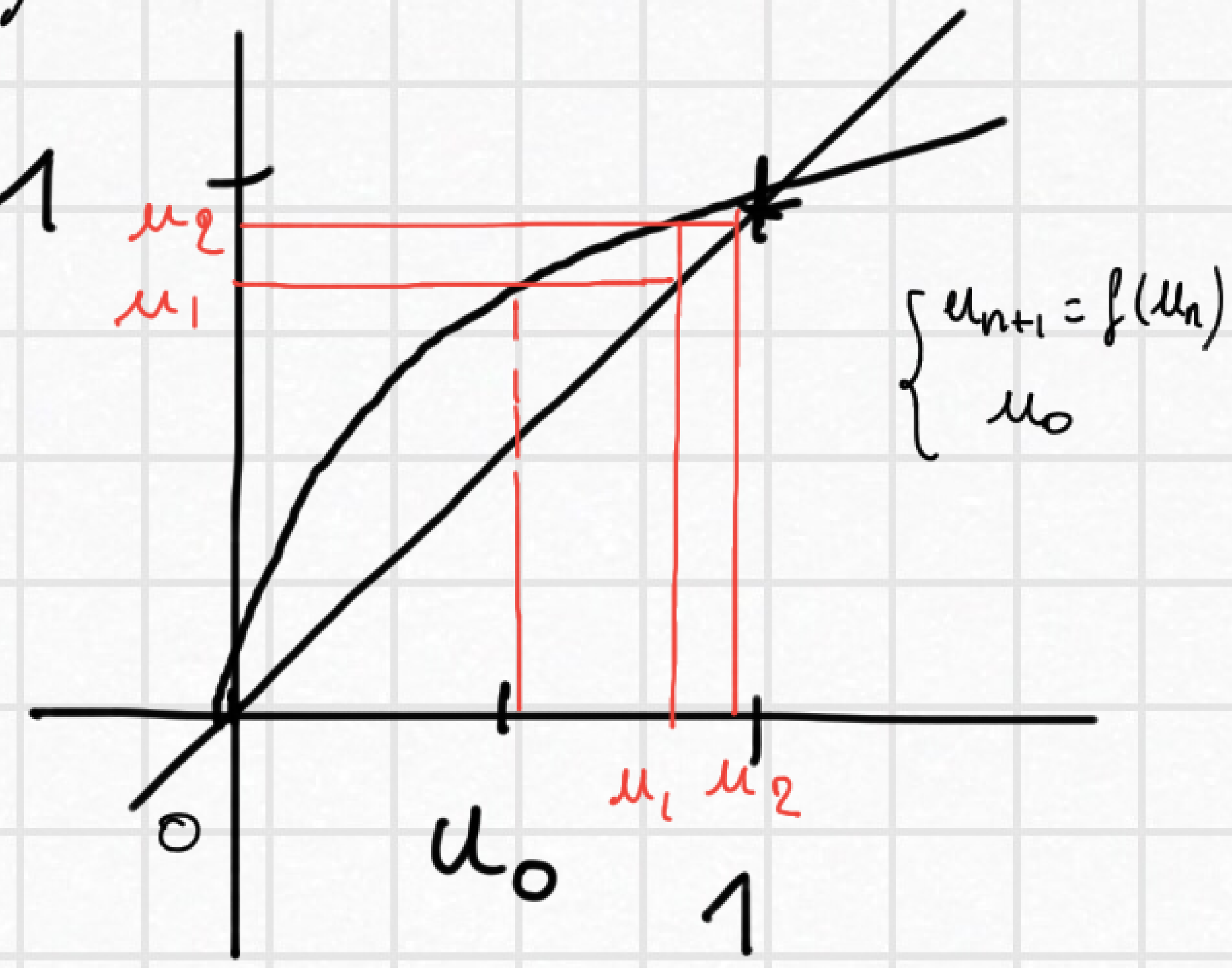
Pour les graphiques a) à d) il faut compléter.

a)



$\left.\begin{array}{l} u_0 < u_1 \\ u_1 > u_2 \\ u_2 < u_3 \end{array}\right\}$ La suite ne semble pas monotone. Elle semble diverger.

b)

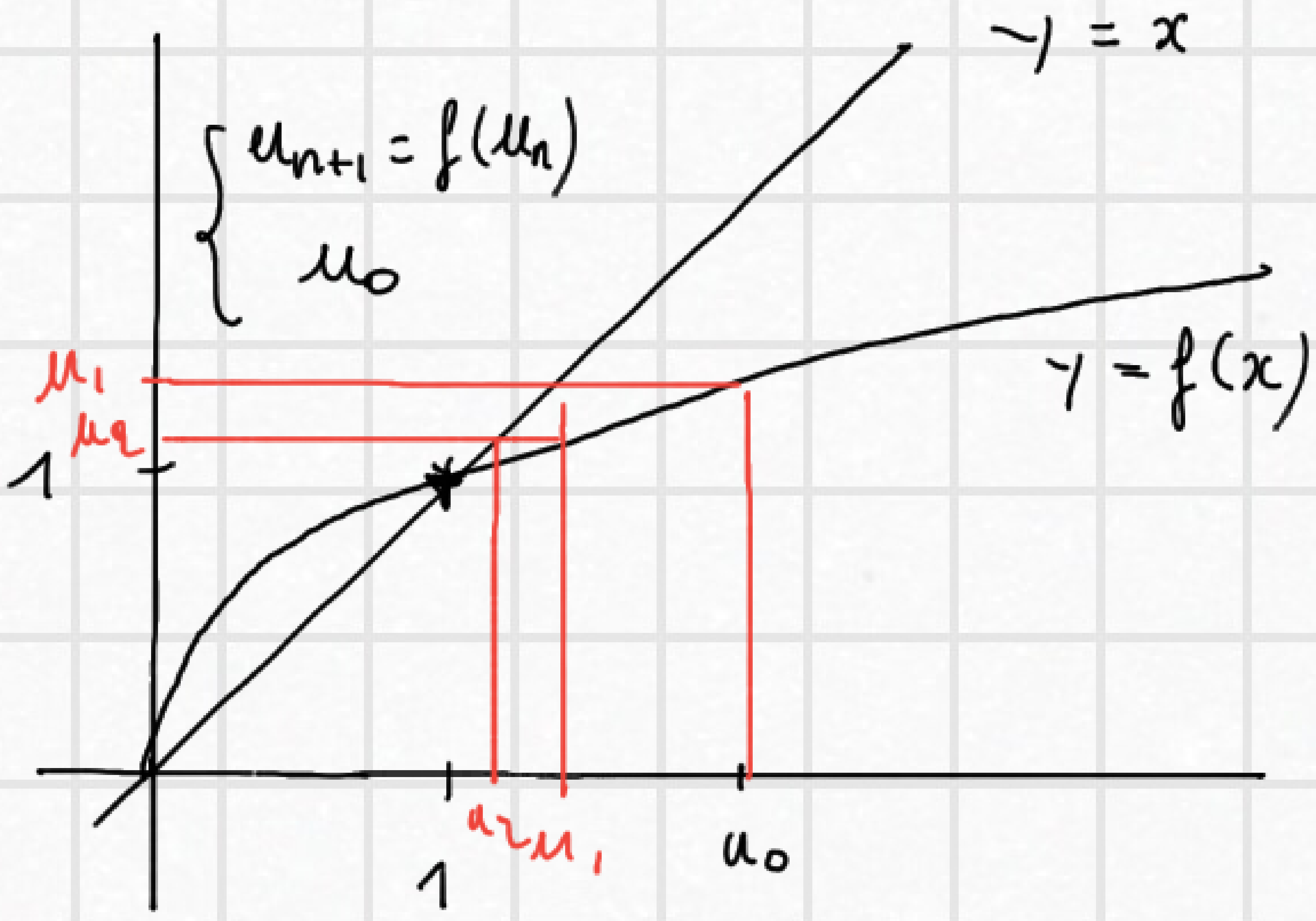


On a zoomé

$u_0 < u_1 < u_2$ ...

Il semble que la suite (u_n) soit croissante et converge vers 1.

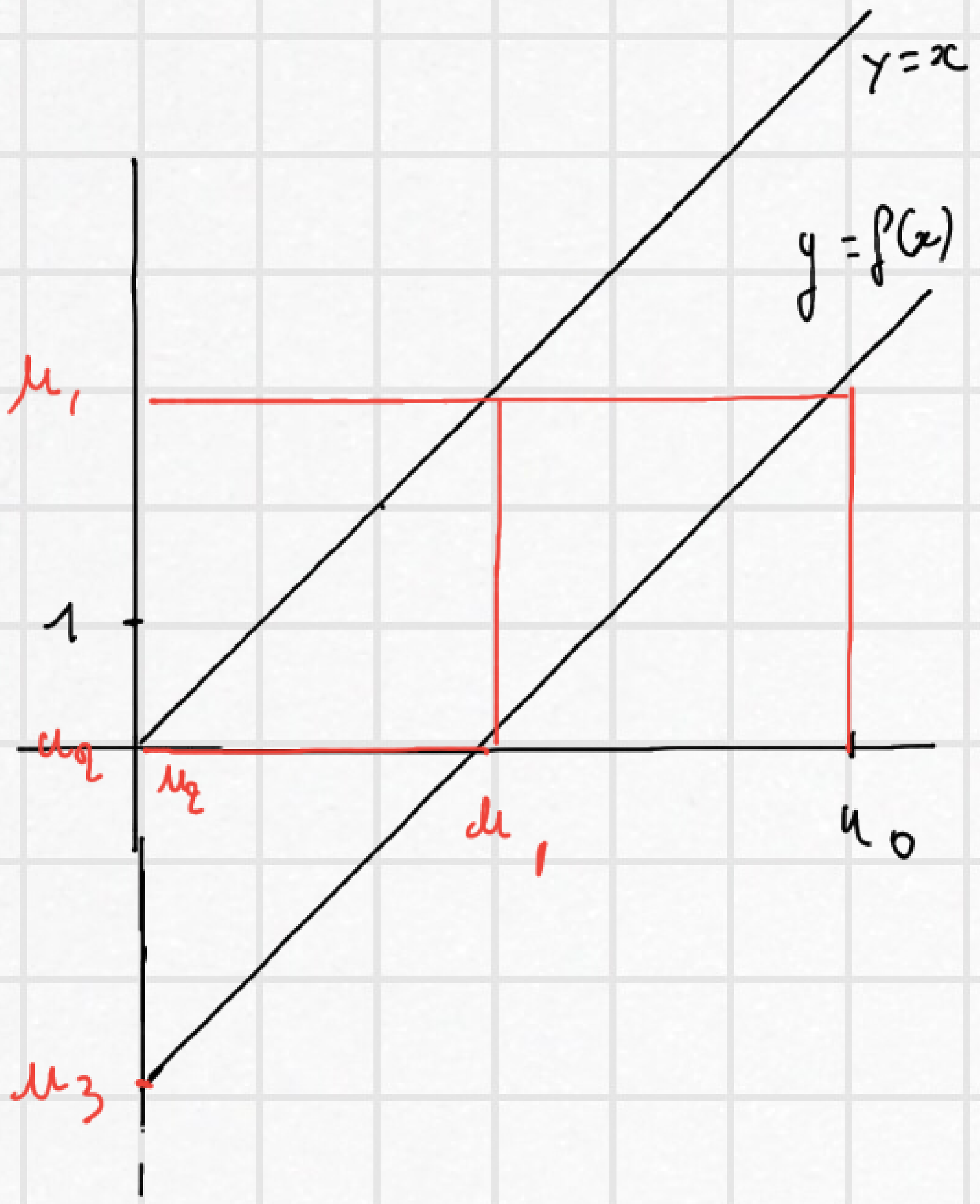
c)



Nous avons juste modifié la valeur de u_0 par rapport au cas précédent.

Il semble que (u_n) soit décroissante et qu'elle converge vers 1.

d)



$u_0 > u_1 > u_2 > u_3 \dots$

(u_n) semble décroissante et divergente.

En fait $u_{n+1} = f(u_n)$

avec $f(x) = x - 3$

donc $u_{n+1} = u_n - 3$ donc

la suite (u_n) est arithmétique

de raison -3.

e) Il semble que (u_n) soit décroissante et converge vers 0.

f) Il semble que (u_n) ne soit pas monotone et converge vers 2.

---

ex 8

Le plutonium 239 est un élément radioactif.

On sait que la quantité de plutonium 239 diminue de 0,003 % tous les ans.

On s'intéresse à un déchet radioactif contenant 1 g de plutonium 239 l'année $t = 0$ et on note t le nombre d'années écoulées à partir de ce moment.

On note m_t la masse de plutonium 239, exprimée en gramme, présente dans le déchet à l'instant t.

1) Écrire m_{t+1} en fonction de m_t.

2) Étudier la nature de la suite (m_t) puis écrire m_t en fonction de t.

3) Étudier le sens de variations de la suite (m_t).

4) Déterminer, avec la calculatrice, le nombre d'années nécessaires pour diminuer de moitié la masse de plutonium 239 dans ce déchet.

Cette durée s'appelle demi-vie radioactive du plutonium 239.

---

1) $m_{t+1} = \left(1 - 3 \cdot 10^{-5}\right) m_t$

$m_{t+1} = 0,99997\, m_t$

2) La suite (m_t) est géométrique de raison $0,99997$ et de premier terme $m_0 = 1$.

donc $m_t = m_0 \times 0,99997^n$

$m_t = 0,99997^n$

3) La raison de la suite est comprise entre 0 et 1 et son premier terme est positif donc (m_t) est décroissante.

4) $0,99997^{23104} \simeq 0,500084$

$0,99997^{23105} \simeq 0,499934$

$m_{23104} > 0,5$

$m_{23105} < 0,6$

La suite (m_t) étant décroissante,

il faut attendre 23105 ans pour voir la radioactivité du plutonium diminuer de moitié.

---

exo 9

On considère la suite (u_n) définie par tout entier naturel n par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n+4}{u_n+9}$.

Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n+4}{u_n-1}$.

1) Démontrer que la suite v est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3) Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4) Étudier les variations de la suite (u_n).

---

1)

$$V_{n+1} = \frac{u_{n+1}+4}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{6u_n+4}{u_n+9}+4}{\frac{6u_n+4}{u_n+9}-1}$$

$$= \frac{6u_n+4+4u_n+36}{u_n+9} \times \frac{u_n+9}{6u_n+4-u_n-9}$$

$$= \frac{10u_n+40}{5u_n-5} = \frac{10(u_n-4)}{5(u_n-1)}$$

$$= 2V_n$$

Ainsi (V_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme

$$V_0 = \frac{u_0+4}{u_0-1} = \frac{5+4}{5-1} = \frac{9}{4}$$

2) $V_n = V_0 \times q^n$

$$V_n = \frac{9}{4} \times 2^n$$

---

3) $V_n = \dfrac{u_n+4}{u_n-1}$

donc $V_n(u_n-1) = u_n+4$

$V_n u_n - u_n = 4 + V_n$

$u_n(V_n-1) = V_n+4$

donc $u_n = \dfrac{V_n+4}{V_n-1}$

ainsi :

$$u_n = \frac{\frac{9}{4}2^n+4}{\frac{9}{4}2^n-1}$$

En multipliant numérateur et dénominateur.

$$u_n = \frac{9\times 2^n+16}{9\times 2^n-4}$$

---

4) $u_n = \dfrac{9\times 2^n-4+20}{9\times 2^n-4}$

$$u_n = \frac{9\times 2^n-4}{9\times 2^n-4} + \frac{20}{9\times 2^n-4}$$

$$u_n = 1 + \frac{20}{9\times 2^n-4}$$

donc

$$u_{n+1}-u_n = 1 + \frac{20}{9\times 2^{n+1}-4} - \left(1+\frac{20}{9\times 2^n-4}\right)$$

$$u_{n+1}-u_n = 20\times\left(\frac{1}{9\times 2^{n+1}}-\frac{1}{9\times 2^n}\right)$$

$$= \frac{20}{9\times 2^n}\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{1}{2}\times\frac{20}{9\times 2^n}$$

$$= \frac{-10}{9\times 2^n} < 0 \quad \text{donc } (u_n)$$

est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$

De plus elle semble converger vers 1.

---

ex 10

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23 % de son intensité lumineuse.

On superpose n plaques de verre identiques et on note i_n l'intensité du rayon à la sortie de la n-ème plaque exprimée en candela.

1) i_0 étant l'intensité lumineuse du rayon avant son entrée dans la première plaque de verre et i_1 l'intensité à la sortie de cette plaque de verre, exprimer i_1 en fonction de i_0.

2) Étude de la suite (i_n)
   a) Quelle est la nature de la suite (i_n) ?
   b) Exprimer i_n en fonction de n et de i_0.
   c) Étudier les variations de la suite (i_n).

3) Déterminer l'intensité initiale d'un rayon dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques teintées est égale à 15 candelas.

4) Combien faut-il au minimum qu'un rayon traverse de plaques pour que son intensité lumineuse soit divisée par 5 ?

---

1) L'intensité diminue de 23% au travers chaque plaque donc le coefficient multiplicateur associé à la baisse est de $1-0,23 = 0,77$.

donc $i_1 = 0,77\, i_0$

2) a) Au passage de la nième plaque de verre, l'intensité diminue de 23% donc

$$i_{n+1} = 0,77\, i_n$$

ainsi (i_n) est la suite géométrique de raison 0,77 et de premier terme i_0.

b) $i_n = i_0 \times 0,77^n$

c) $i_0 > 0$ et $0 < 0,77 < 1$.

D'après le cours la suite (i_n) est strictement décroissante

3) $i_4 = 15 \iff i_0 \times 0,77^4 = 15$

soit $i_0 = \dfrac{15}{0,77^4} \simeq 42,67$ candelas

4) $i_0 \times 0,77^n = \dfrac{i_0}{5}$

on cherche donc le plus petit entier naturel n tel que

$$0,77^n \leqslant \frac{1}{5}$$

A la calculatrice, on trouve : $n \geqslant 7$

ex 11

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{3}{2}$

1) compléter l'algorithme suivant afin qu'il calcule et affiche les 10 premiers termes de la suite (u_n).

```
Affecter à u la valeur ...
Afficher la variable u
Pour n allant de ... à ...
    Affecter à u la valeur ...
    Afficher la variable u
```

2) En utilisant cet algorithme ou la calculatrice, conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) et son éventuelle limite.

3) Peut-on étudier les variations de la suite (u_n) à l'aide de la formule de récurrence ?

4) Démonstration des variations à l'aide d'une suite auxiliaire

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 3$.

a) Calculer à la main v_0 et v_1.

b) Déterminer la nature de la suite (v_n).

c) En déduire la formule explicite de v_n puis celle de u_n.

d) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

---

1)

```
Affecter à u la valeur 4
Afficher la variable u
Pour n allant de 1 à 9
    Affecter à u la valeur 1/2 u + 3/2
    Afficher la variable u
```

2) $u_0 = 4$

$u_1 = 3{,}5$

$u_{10} \simeq 3{,}000977$

$u_{20} \simeq 3{,}000001$

$u_{30} \simeq 3$

Il semble que (u_n) soit décroissante et que (u_n) converge vers 3.

3) La relation de récurrence ne nous donne pas d'indication sur le sens de variation de (u_n). En effet la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ est définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. f est croissante alors que (u_n) est décroissante.

4) a) $v_0 = u_0 - 3 = 4 - 3 = 1$

$v_1 = u_1 - 3$

or $u_1 = \frac{1}{2} u_0 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times 4 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

donc $v_1 = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$

b) $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{3}{2} - 3$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - \frac{3}{2}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} (u_n - 3)$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

c) $v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$v_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$v_n = u_n - 3 \iff u_n = v_n + 3$

donc $\underline{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3}$

d) $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \underbrace{\left(\frac{1}{2} - 1\right)}_{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 0$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc

(u_n) est bien strictement décroissante.

---

ex 12

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par son premier terme $u_1 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)u_n + n - 1}{2n}$.

PARTIE A : Algorithme et conjecture

1) Écrire un algorithme permettant de calculer et d'afficher les 20 premiers termes de la suite (u_n).

2) À l'aide de cet algorithme ou de la table de valeurs de la calculatrice, conjecturer le sens de variations et la convergence de la suite (u_n).

PARTIE B : Suite auxiliaire

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{n}$.

1) Montrer que (v_n) est géométrique.

2) Écrire v_n en fonction de n.

3) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1.$$

4) Justifier que pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - n).$$

En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

A1)

$u \leftarrow 2$

Afficher u

Pour i allant de 1 à 19

  $u \leftarrow \dfrac{(i+1)u + i - 1}{2i}$

Afficher u

Programme Python

```
from math import *
n=20
u=2
print(u)
for i in range(1,n):
    u=((i+1)*u+i-1)/(2*i)
    print(u)
```

2) Il semble que la suite soit décroissante et converge vers 1.

B1)

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{n+1} = \frac{\frac{(n+1)u_n + n - 1}{2n} - 1}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)u_n + n - 1 - 2n}{2n(n+1)} = \frac{(n+1)u_n - n - 1}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)u_n - (n+1)}{2n(n+1)} = \frac{(n+1)(u_n - 1)}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{u_n - 1}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - 1}{n}\right) = \frac{1}{2} v_n.$$

(ou on remplace u_n par son expression en fonction de v_n :

$v_n = \dfrac{u_n - 1}{n} \Rightarrow n v_n = u_n - 1$ et

donc $\underline{u_n = n v_n + 1}$)

(V_n) est donc une suite géométrique de premier terme $V_1 = \frac{u_1 - 1}{1} = \frac{2-1}{1} = 1$

donc $V_n = V_1 \times q^{n-1}$

$V_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \underline{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$.

Nous avons vu précédemment (dans la parenthèse) que

$u_n = nV_n + 1$

donc $\underline{u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1}$

4) Pour $n \geqslant 1$

$u_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$

$u_{n+1} - u_n = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 - \left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1\right)$

$= (n+1) \times \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{+1}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^n} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

on factorise $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

donc $u_{n+1} - u_n =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[(n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right) - n\right] =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} - n\right) =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-n+1\right) =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(1-n\right)$

on a bien :

$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-n)$

or Pour $n \geqslant 1$ $1 - n \leqslant 0$ et puisque $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$ alors $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et donc (u_n) est décroissante pour $n \geqslant 1$.