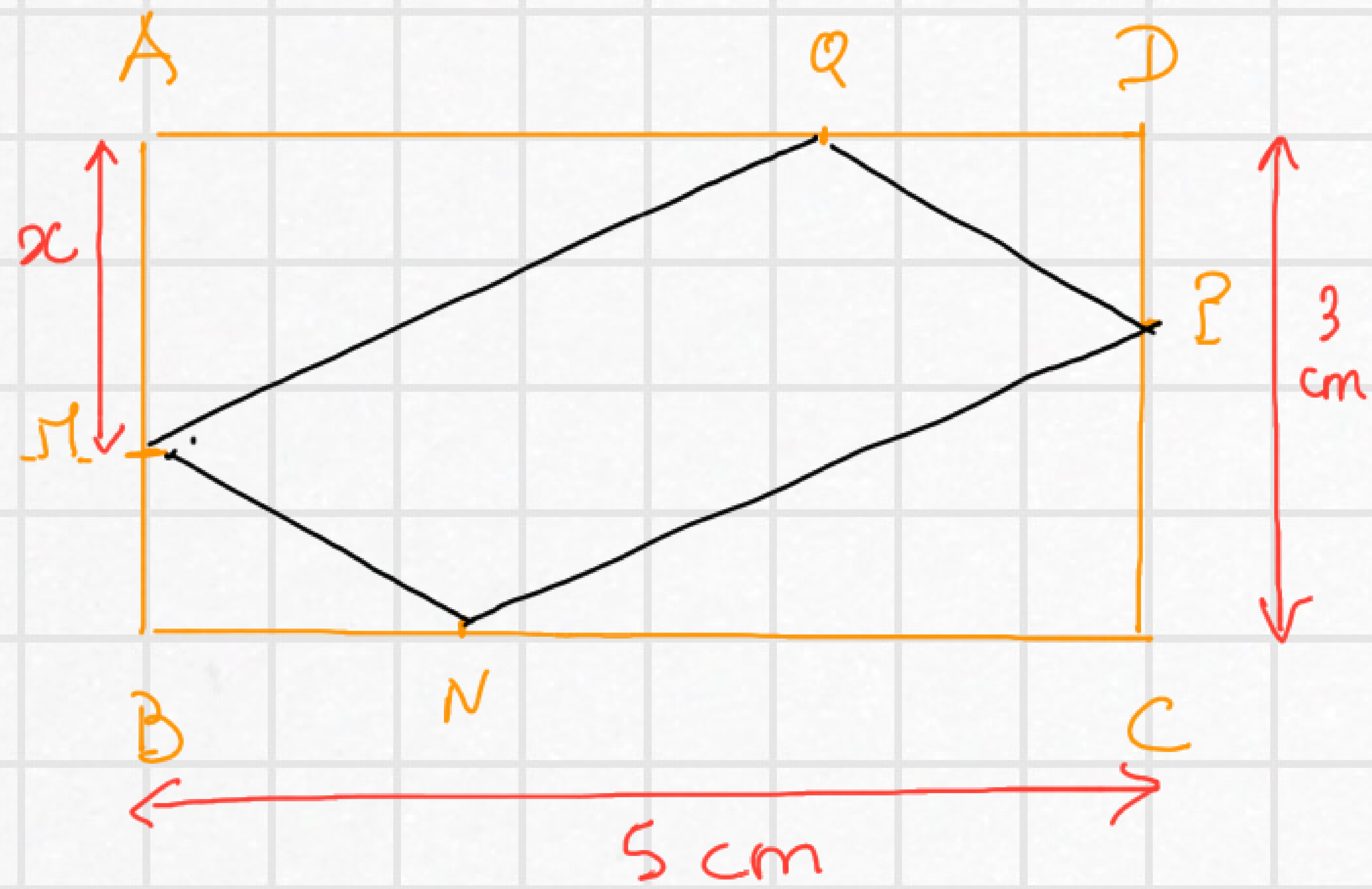
Dérivation et problèmes géométriques

1) ABCD est un rectangle tel que $AB = 3$ cm et $BC = 5$ cm. Les points M, N, P et Q appartiennent au rectangle tels que :
$AM = BN = CP = DQ$.
On note x la longueur AM (en cm) et $\mathcal{A}(x)$ l'aire de MNPQ en cm^2.



1) Préciser l'ensemble de définition de $\mathcal{A}$.
2) Exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x
3) Quelle est l'aire maximale de MNPQ ? Son aire minimale ?
4) Peut-on placer M de telle sorte que MNPQ ait une aire inférieure à 9 cm^2 ?

---

1) $0 \leq x \leq 3$
$x = 0$: M est en A
$x = 3$: M est en B.

2) Nous pouvons obtenir l'aire de MNPQ comme différence entre l'aire du rectangle ABCD et l'aire des quatre triangles.

- Aire du rectangle ABCD : $3 \times 5 = 15$
- Aire des triangles AMQ et NCP : $\dfrac{x \times (5-x)}{2}$ $(\times 2)$
- Aire des triangles BMN et QDP : $\dfrac{(3-x) \times x}{2}$ $(\times 2)$

$$\mathcal{A}(x) = 15 - x(5-x) - x(3-x)$$
$$= 15 + x^2 - 5x - 3x + x^2$$
$$= 2x^2 - 8x + 15$$

3) Étudions les variations de $\mathcal{A}$

- Avec le cours sur le 2nd degré maximum atteint en $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Étude du signe de la dérivée.

$\mathcal{A}'(x) = 4x - 8$
$\mathcal{A}'(x) \geq 0 \iff x \geq 2$

x	0		2		3
Signe de $\mathcal{A}'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de $\mathcal{A}$	15	$\searrow$	7	$\nearrow$	9

. L'aire maximale est atteinte en $x=0$. MNPQ confondu avec ABCD.

. L'aire minimale est obtenue pour $x=2$ et vaut $7\ cm^2$

4) $A(x) \leq 9$

$2x^2 - 8x + 15 \leq 9$

$2x^2 - 8x + 6 \leq 0$

$x^2 - 4x + 3 \leq 0$

$x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

ainsi $A(x) \leq 9$ pour $1 \leq x \leq 3$

2) ABCD est un carré de côté 2. Pour tout $x \in [0;2]$, on place le point M de [AB] tel que $BM = x$.
On considère le point N de [AD] tel que le cercle de centre N passant par D soit tangent au cercle de centre M passant par B.
On note $y = DN$.

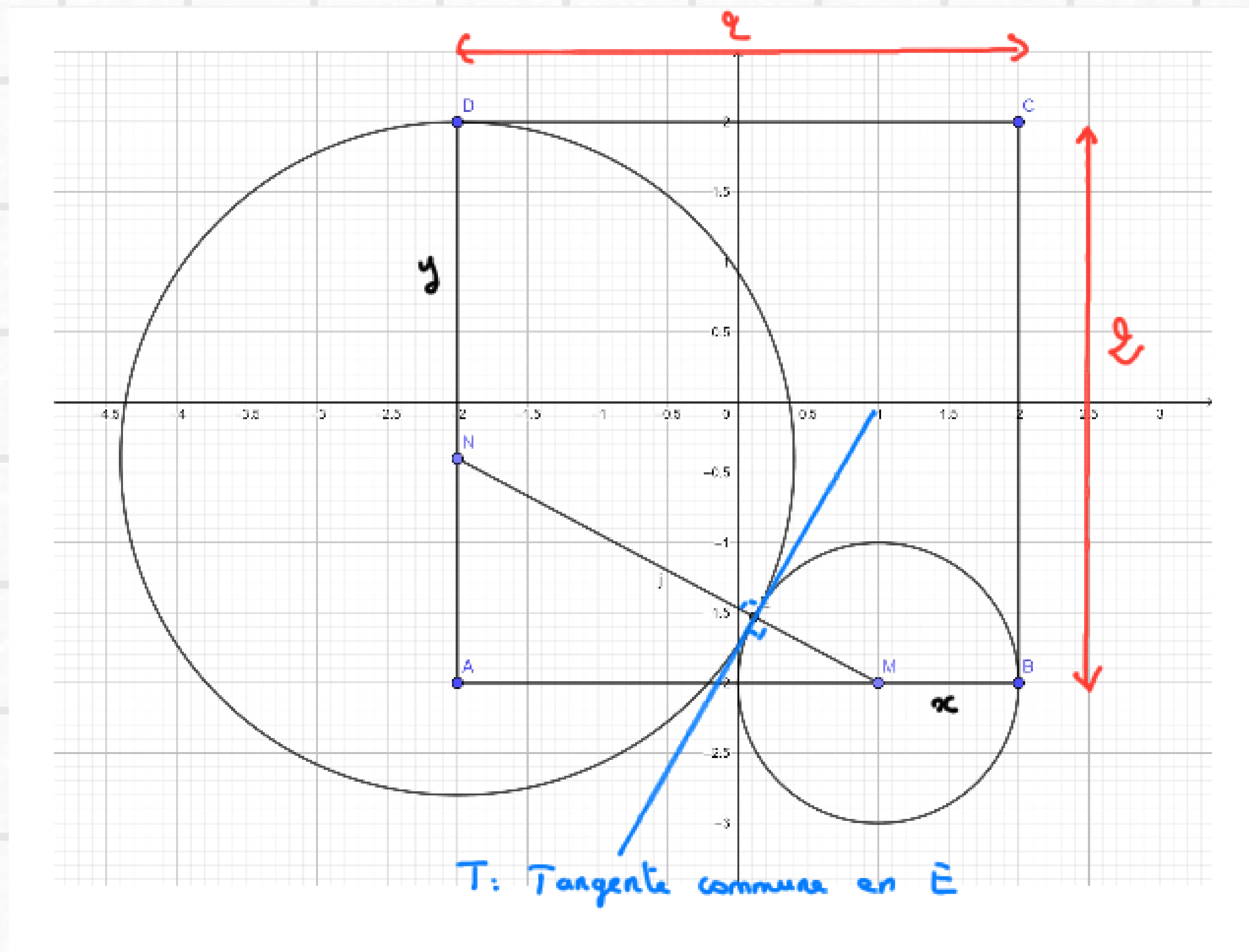
1) Faire une figure.

2) Démontrer que :
$MN^2 = (2-x)^2 + (2-y)^2$ et que
$MN^2 = (x+y)^2$

3) En déduire que $y = -2 + \frac{8}{x+2}$

4) Déterminer le sens de variations de $[0;2]$ de la fonction f qui à x associe y.

1)



2) En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AMN :

$MN^2 = AN^2 + AM^2$

$MN^2 = (2-y)^2 + (2-x)^2$

Notons E le point d'intersection des 2 cercles tangents. Ils ont une tangente commune en E. Notons la T. T est perpendiculaires aux rayons issus de E de chacun des deux cercles. Ainsi $T \perp (NE)$ et $T \perp (ME)$

Donc (ME) // (NE) et (ME) et (NE) sont en fait confondues puisqu'elles possèdent un point commun. Les points M, N et E sont alignés. Nous pouvons donc écrire l'égalité en distance

$MN = ME + EN$ (vraie car $E \in [MN]$)

$MN = x + y$

$MN^2 = (x+y)^2$

3) Egalisons les deux expressions de MN^2

$(2-x)^2 + (2-y)^2 = (x+y)^2$

$4 - 4x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$8 - 4x - 4y = 2xy$

$8 - 4x = 2xy + 4y$

$8 - 4x = y(2x+4)$

donc $y = \frac{8-4x}{2x+4} = \frac{2(4-2x)}{2(x+2)} = \frac{4-2x}{x+2}$

Or $-2 + \frac{8}{x+2} = \frac{-2(x+2)+8}{x+2}$

$= \frac{-2x-4+8}{x+2}$

$= \frac{-2x+4}{x+2} = y$

4) Posons $f(x) = -2 + \frac{8}{x+2}$

définie sur $[0;2]$

$f'(x) = \frac{-8}{(x+2)^2} < 0$ pour $x \in [0;2]$

ainsi f est strictement décroissante sur $[0;2]$.

3) Un industriel doit fabriquer une boîte fermée de volume $1\,dm^3$ ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur y et dont la base est un carré de côté $x > 0$. L'unité de longueur est le décimètre.

1) Justifier que $y = \frac{1}{x^2}$

2) En déduire que l'aire totale de la boîte est $S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$

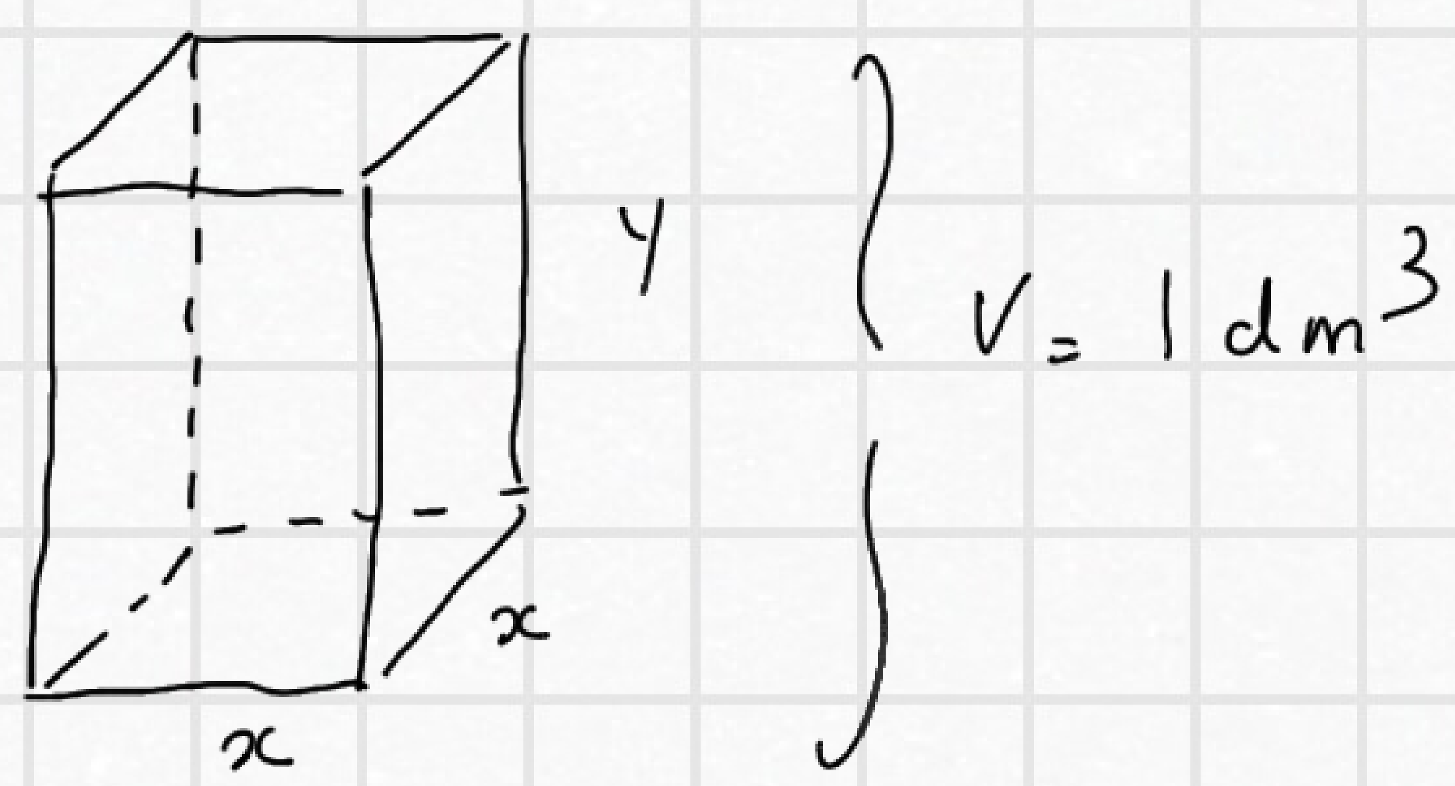
3) Montrer que pour $x > 0$,
$f'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$

4) a) En déduire le sens de variations de S sur $]0;+\infty[$.

b) Donner les dimension de la boîte d'aire minimale.

---

1)



$V = x \times x \times y$ donc $1 = x^2 y$

soit $y = \frac{1}{x^2}$

2) L'aire totale de la boîte est formée de quatre rectangles d'aire xy et de deux carrés

d'aire $x \times x = x^2$

$f(x) = 4xy + 2x^2$

$= 4x \times \frac{1}{x^2} + 2x^2$

$S(x) = \frac{4}{x} + 2x^2$

3) $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + 4x$

$S'(x) = \frac{-4 + 4x^3}{x^2}$

or $4(x-1)(x^2+x+1) =$

$4(x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1) =$

$4(x^3 - 1) = 4x^3 - 4$

ainsi $f'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$

4a) Pour $x > 0$

$x^2 + x + 1 > 0$ ($\Delta < 0$)

donc $S'(x)$ est du signe de $x - 1$.

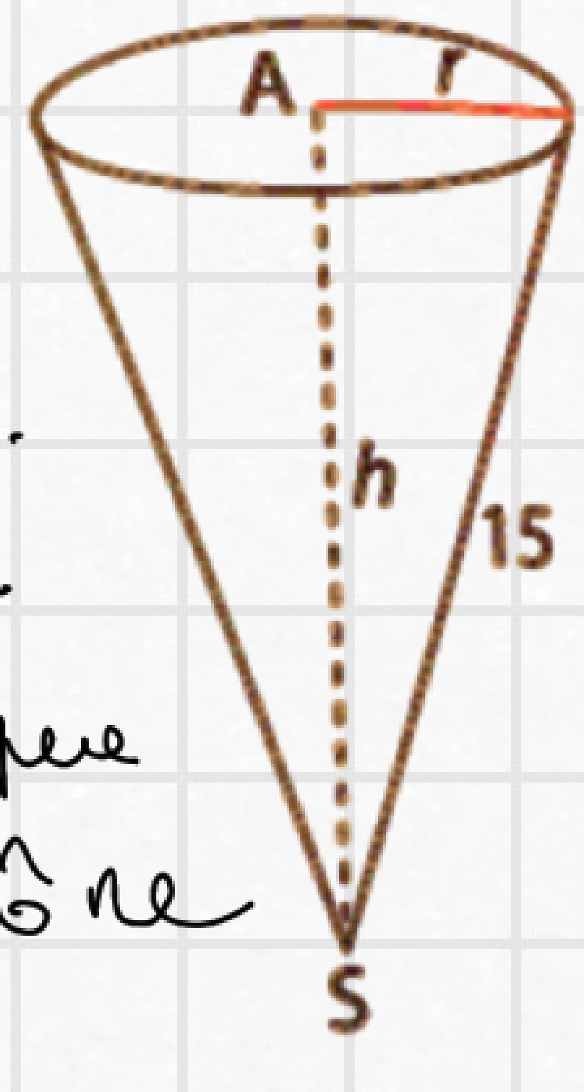
D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de S	‖	$\searrow$	6	$\nearrow$	

b) L'aire minimale de la boîte est donc atteinte pour $x = 1$ dm et donc pour $y = 1$ dm. Le parallélépipède est donc un cube de côté 1. Cette aire minimale vaut 6 dm², ce qui est cohérent puisque chaque côté est un carré d'aire 1 dm² et il y en a six.

On peut même généraliser en proposant que les parallélépipèdes de volume donné et d'aire minimale sont les cubes.

4) On découpe dans un disque de rayon 15 cm le patron d'un cône. On souhaite que ce cône soit de volume maximal. On note r le rayon de sa base et h sa hauteur.



1) Exprimer r en fonction de h.

2) Justifier que $h \in [0, 15]$ et que le volume du cône est :

$V(h) = -\frac{1}{3}\pi h^3 + 75\pi h$

3) Etudier le sens de variation de la fonction V qui à tout $h \in [0;15]$ associe $V(h)$.

4) En déduire pour le cône de volume maximal :

a) sa hauteur ;

b) son demi-angle au sommet à 1 degré près.

---

1) Le théorème de Pythagore nous donne :

$r^2 + h^2 = 15^2$ soit $r^2 = 225 - h^2$

$r = \sqrt{225 - h^2}$

2) Si $r = 0$ alors $h = 15$

Si $r = 15$ alors $h = 0$

donc $h \in [0, 15]$.

$V = \frac{1}{3} \times (\pi r^2) \times h$

$V = \frac{1}{3}\pi (225 - h^2) h$

$V(h) = -\frac{1}{3}\pi h^3 + 75\pi h$

---

3) $V'(h) = -\frac{1}{3}\pi \times 3h^2 + 75\pi$

$V'(h) = -\pi h^2 + 75\pi$

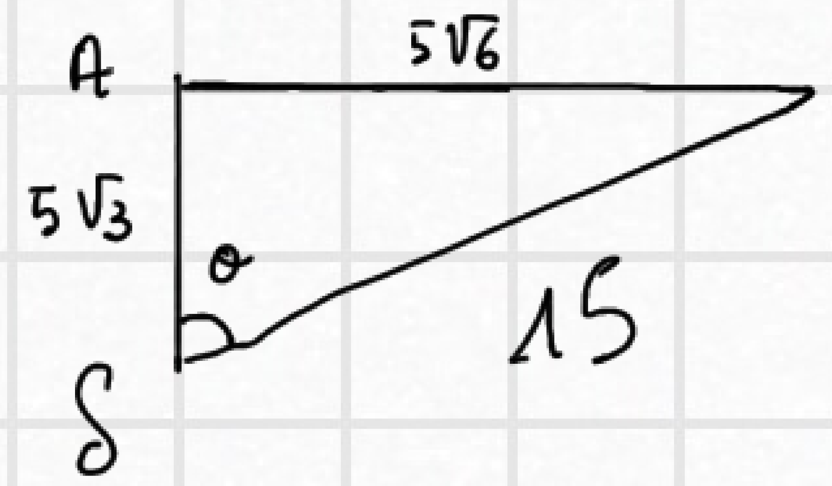
$= \pi(75 - h^2)$

x	0		$\sqrt{75}$		15
Signe de $V'(h)$		$+$	0	$-$	
Variations de V		$\nearrow$	$V(\sqrt{75})$	$\searrow$	

4 a) $h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ est la hauteur du cône pour laquelle le volume est maximal.

b) Elle correspond à un rayon de :

$r = \sqrt{225 - 75} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$

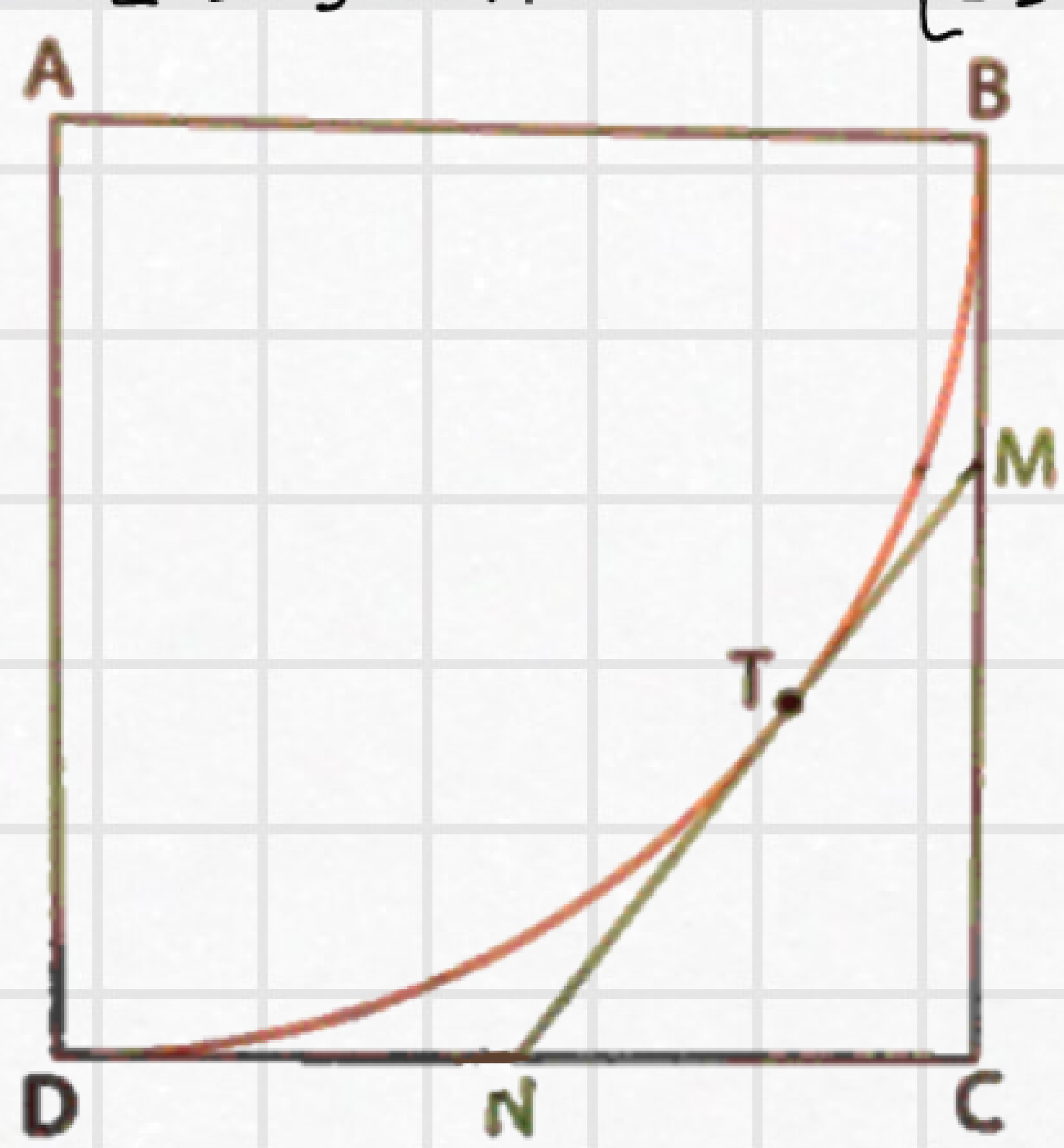


$\sin\theta = \frac{5\sqrt{6}}{15} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

donc $\theta = A.\sin\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \simeq \underline{54{,}7°}$

---

5) ABCD est un carré de côté 1. $\mathcal{C}$ est le quart de cercle de centre A et de rayon AB contenu dans le carré ABCD. T est un point quelconque de $\mathcal{C}$. La tangente à $\mathcal{C}$ en T, coupe [BC] en M et [CD] en N.



On cherche la distance MN minimale.
Soit $x = BM$ et $y = DN$.

1) En considérant les triangles ATM et ABM, démontrer que $MT = x$.

2) En déduire que $MN = x + y$.

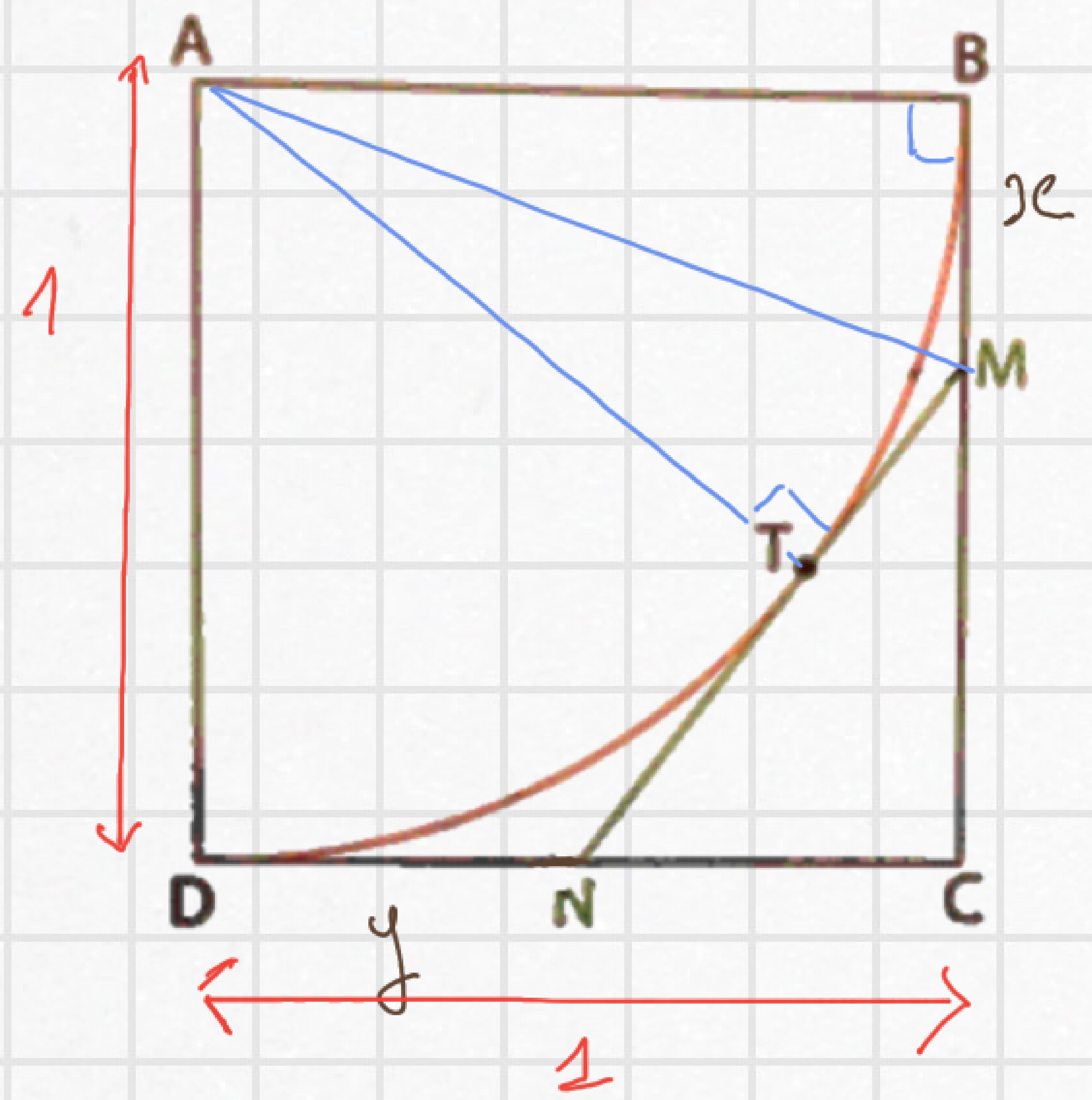
3) Montrer aussi que
$$MN^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$$

4) En déduire y en fonction de x puis montrer que $MN = \frac{x^2+1}{x+1}$

5) Etudier le sens de variations de la fonction f qui à tout x de $[0;1]$ associe MN. Conclure.

---

1)



Le triangle ABM est rectangle en M avec $AB = 1$ et $BM = x$
donc $AM^2 = 1^2 + x^2$
Le triangle ATM est rectangle en T car AT est un rayon du cercle $\mathcal{C}$ et la tangente en T au cercle est perpendiculaire à ce rayon.

$AT = 1$

$$\underbrace{AT^2}_{1^2} + MT^2 = AM^2$$
$$1^2 + MT^2 = AM^2$$

$$\begin{cases} AM^2 = MT^2 + 1 \\ AM^2 = x^2 + 1 \end{cases}$$

donc $MT^2 = x^2$ et puisque $x \geqslant 0$
on a $\underline{MT = x}$.

2) Avec le même raisonnement que précédemment, on déduit que $NT = y$.

Et puisque $T \in [MN]$,
$MN = MT + TN = x + y$.

3) Le triangle MNC est rectangle en C donc $MN^2 = MC^2 + CN^2$
avec $MC = 1 - x$ et $CN = 1 - y$.
Ainsi $MN^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$

4) $MN^2 = (x+y)^2$
et $MN^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$
donc
$$(x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2$$

$$2xy = 2 - 2x - 2y$$
$$xy = 1 - x - y$$
$$xy + y = 1 - x$$
$$y(1+x) = 1 - x$$
$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

4) $MN = x + y = x + \dfrac{1-x}{1+x}$

$$MN = \frac{x(1+x) + 1 - x}{1+x}$$
$$MN = \frac{x + x^2 + 1 - x}{1+x}$$
$$MN = \frac{x^2+1}{1+x}$$

5) Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{1+x}$ sur $[0;1]$

$$f'(x) = \frac{2x(1+x) - (x^2+1)\times 1}{(1+x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{(1+x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2}$$

$f'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x - 1$

Les deux racines sont :

$$\begin{cases} x_1 = -1-\sqrt{2} < 0 \\ x_2 = -1+\sqrt{2} \simeq 0{,}41 > 0 \end{cases}$$

x	0		$-1+\sqrt{2}$		1
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		$\searrow$	$f(-1+\sqrt{2})$	$\nearrow$	

$$MN = \frac{(-1+\sqrt{2})^2+1}{-1+\sqrt{2}+1} = \frac{1-2\sqrt{2}+2+1}{\sqrt{2}}$$
$$MN = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-4}{2} = 2\sqrt{2}-2$$

$$\begin{aligned} y &= MN - x \\ &= 2\sqrt{2} - 2 - (-1+\sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 + 1 - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

Nous trouvons que $x = y$, ce qui est cohérent compte tenu de la symétrie du problème.