Dérivation - Opérations - dérivées - tangentes

1) Calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I indiqué :

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = (3x-1)(x+1)^2$ sur $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = (\sqrt{x}+1)^2$ sur $I =]0;+\infty[$

d) $f(x) = \frac{3}{4x} - \frac{2x}{5}$ sur $I = \mathbb{R}^*$

e) $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$ sur $I =]\frac{1}{2};+\infty[$

f) $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{4-x}$ sur $I =]-\infty;4[$

g) $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{3-x}$ sur $I =]-\infty;3[$

---

a) $(ku)' = k \times u'$ et $(u+v)' = u'+v'$

$f'(x) = -\frac{1}{4} \times 4x^3 + 3 \times 3x^2 - 2 \times 2x + 4$

$f'(x) = -x^3 + 9x^2 - 4x + 4$

b) $(uv)' = u'v + uv'$

et si $v = u$ alors :

$(u^2)' = u'u + uu' = 2u'u$

$f = u \times v$ avec

$u(x) = 3x-1$ et $u'(x) = 3$

$v(x) = (x+1)^2$ et $v'(x) = 2(x+1)$

$f' = u'v + u'v$

donc $f'(x) = 3(x+1)^2 + (3x-1) \times 2(x+1)$

Factorisons $(x+1)$

$f'(x) = (x+1)\left[3(x+1) + 2(3x-1)\right]$

$f'(x) = (x+1)(3x+3+6x-2)$

$f'(x) = (x+1)(9x+1)$

c) $f = u^2$ donc $f' = 2u'u$

avec $u(x) = \sqrt{x} + 1$ et $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

donc $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (\sqrt{x}+1)$

$f'(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

d) f est la somme de 2 fonctions u et v.

$u(x) = \frac{3}{4x} = \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{coefficient multiplicateur}} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{fonction}}$

$u'(x) = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-3}{4x^2}$

$v(x) = -\frac{2x}{5} = -\frac{2}{5}x$

$v'(x) = -\frac{2}{5}$

$f = u + v$ donc $f' = u' + v'$

$f'(x) = \frac{-3}{4x^2} - \frac{2}{5}$

e) $f = \frac{1}{u}$ donc $f' = -\frac{u'}{u^2}$ avec

$u(x) = (1-2x)^2$

et $u'(x) = 2(-2)(1-2x) = -4(1-2x)$

$f'(x) = \frac{-(-4(1-2x))}{[(1-2x)^2]^2} = \frac{4(1-2x)}{(1-2x)^4}$

$f'(x) = \frac{4}{(1-2x)^3}$

f) $f = \frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = x^2 - 2x + 3$

$u'(x) = 2x - 2$

et $v(x) = 4 - x$

$v'(x) = -1$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(4-x) - (x^2-2x+3)\times 1}{(4-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x - 2x^2 - 8 + 2x - x^2 + 2x - 3}{(4-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 12x - 11}{(4-x)^2}$$

g) $f'(x) = 2 - \frac{(-1)}{(3-x)^2}$

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{(3-x)^2}$$

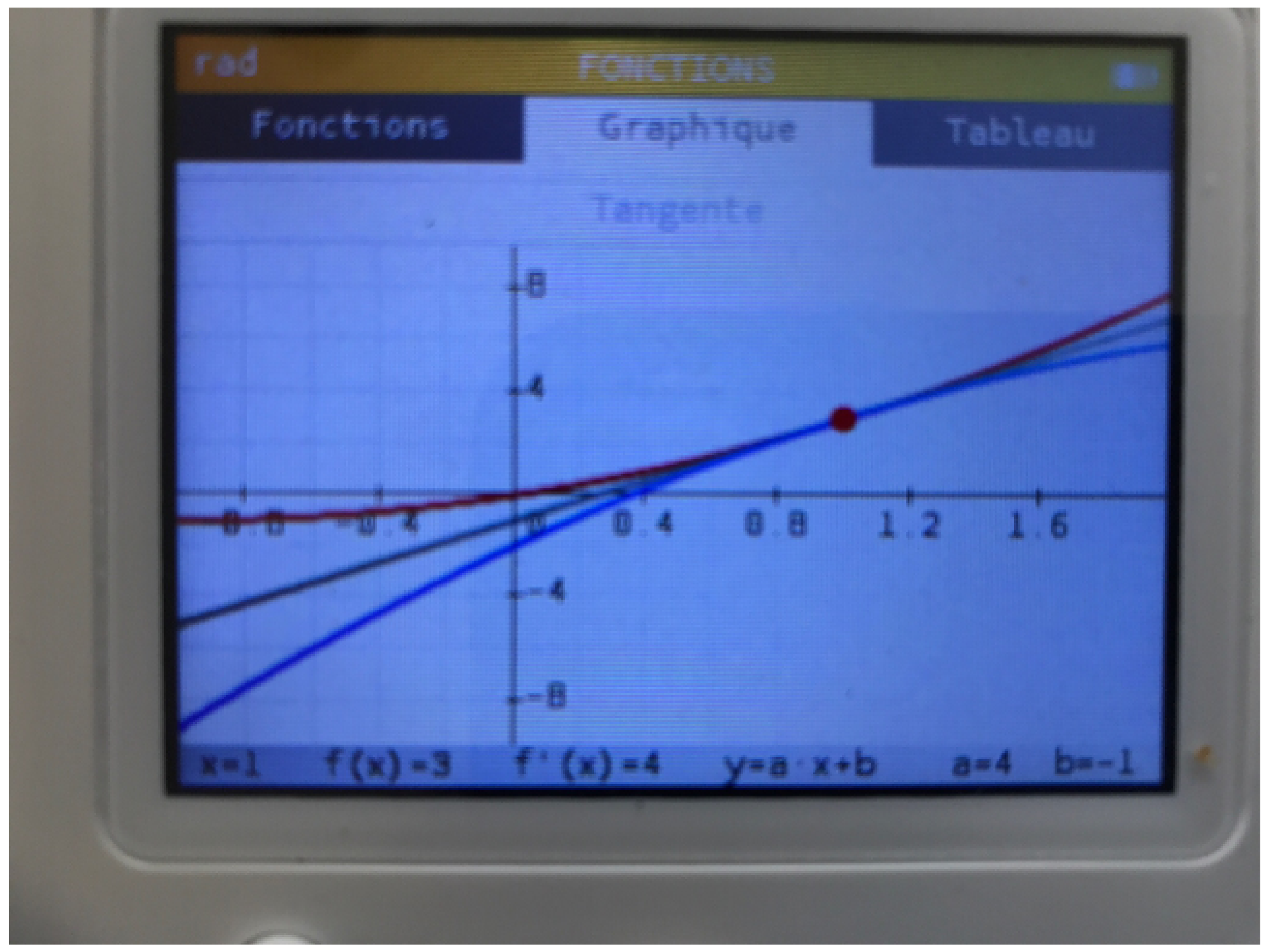
2) Courbes tangentes

1) Tracer les courbes $\mathcal{C}_1 : y = x^2 + 2x$
$\mathcal{C}_2 : y = -x^2 + 6x - 2$ sur une calculatrice.

2) Montrer qu'elles n'ont qu'un point commun A.

3) Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont la même tangente en A. On dit alors que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents en A.

1)



2) A : $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x^2 + 6x - 2 \end{cases}$

L'abscisse du point A vérifie :

$x^2 + 2x = -x^2 + 6x - 2 = 0$

$2x^2 - 4x + 2 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

$x = 1$

Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en un unique point $A(1;3)$.

3) L'équation réduite de la tangente en a à une courbe $\mathcal{C}_f : y = f(x)$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Ici $a = 1$ et $f(a) = f(1) = 3$

$\mathcal{C}_1 : y = f_1(x)$ avec $f_1(x) = x^2 + 2x$

$\mathcal{C}_2 : y = f_2(x)$ avec $f_2(x) = -x^2 + 6x - 2$

Montrons que $f_1'(1) = f_2'(1)$

$$\left.\begin{array}{l} f_1'(x) = 2x + 2 \text{ donc } f_1'(1) = 4 \\ f_2'(x) = -2x + 6 \text{ donc } f_2'(1) = 4 \end{array}\right\} f_1'(1) = f_2'(1)$$

Les 2 courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont donc une tangente commune en $x = 1$ d'équation

$y = 4(x-1) + 3$ soit $\underline{y = 4x - 1}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1) Préciser l'ensemble de définition de f.

2) Donner les coordonnées du point A où $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées.

3) La courbe $\mathcal{C}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

4) Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}$.

5) Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.

---

1) $x-1 \neq 0$ donc $x \neq 1$

$D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

2) $f(0) = \frac{6}{-1} = -6$ donc $A(0;-6)$

3) $f(x) = 0 \iff \begin{cases} x^2-3x+6=0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$. Le discriminant est évidemment négatif donc cette équation n'admet pas de solution et la courbe ne possède pas de points d'intersection avec l'axe des abscisses.

4) $T_A : y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$

$f(0) = -6$

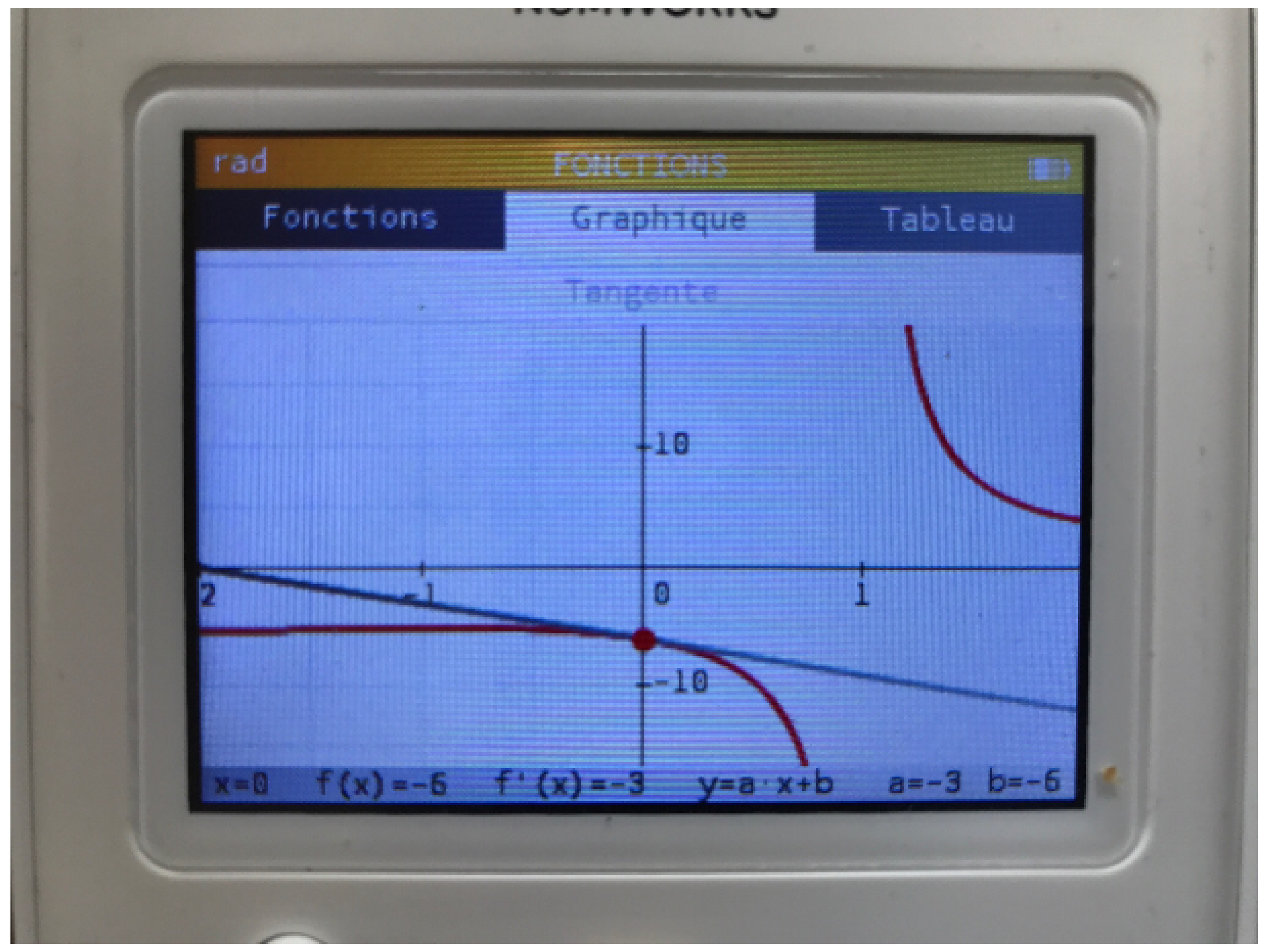
$f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x+6)\times 1}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2-2x-3x+3-x^2+3x-6}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$f'(0) = \dfrac{-3}{(-1)^2} = -3$

$T_A : y = -3x-6$



5) $f(x) - (-3x-6)$

$= \dfrac{x^2-3x+6}{x-1} + 3x+6$

$= \dfrac{x^2-3x+6}{x-1} + \dfrac{(3x+6)(x-1)}{x-1}$

$= \dfrac{x^2-3x+6+3x^2-3x+6x-6}{x-1}$

$= \dfrac{4x^2}{x-1}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $4x^2$		+	0	+		+	
signe de $x-1$		−		−	0	+	
signe de $f(x)-(-3x-6)$		−	0	−	‖	+	

Sur $]-\infty ; 1[$; $f(x)-(-3x-6) \leq 0$ donc $\mathcal{C}$ est au dessous de T_A.

Sur $]1 ; +\infty[$; $f(x)-(-3x-6) \geq 0$ donc $\mathcal{C}$ est au dessus de T_A.

et en $x=0$ $f(x)-(-3x-6)=0$. En effet, $\mathcal{C}$ et T_A se coupent en A d'abscisse 0.

4) A l'aide d'une calculatrice, la droite $d: y = \frac{5}{3}x - 4$ semble être une tangente à la courbe $\mathcal{C}$: $y = f(x)$ avec $f(x) = x^2 - 4x + 4$.
Est-ce vraiment le cas ?

Nous pouvons procéder de 2 façons :

① Montrer que $f(x) - (\frac{5}{3}x - 4) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$

② Résoudre $f'(x) = \frac{5}{3}$ et montrer que l'équation réduite de la tangente en ce point est bien $y = \frac{5}{3}x - 4$.

Utilisons la stratégie 2.

$f'(x) = 2x - 4$ et $f'(x) = \frac{5}{3} \iff 2x - 4 = \frac{5}{3}$

Soit $2x = \frac{5}{3} + 4 = \frac{5}{3} + \frac{12}{3} = \frac{17}{3}$ et $x = \frac{17}{6}$.

Déterminons une équation de la tangente en ce point

$T: y = f'(\frac{17}{6})(x - \frac{17}{6}) + f(\frac{17}{6})$

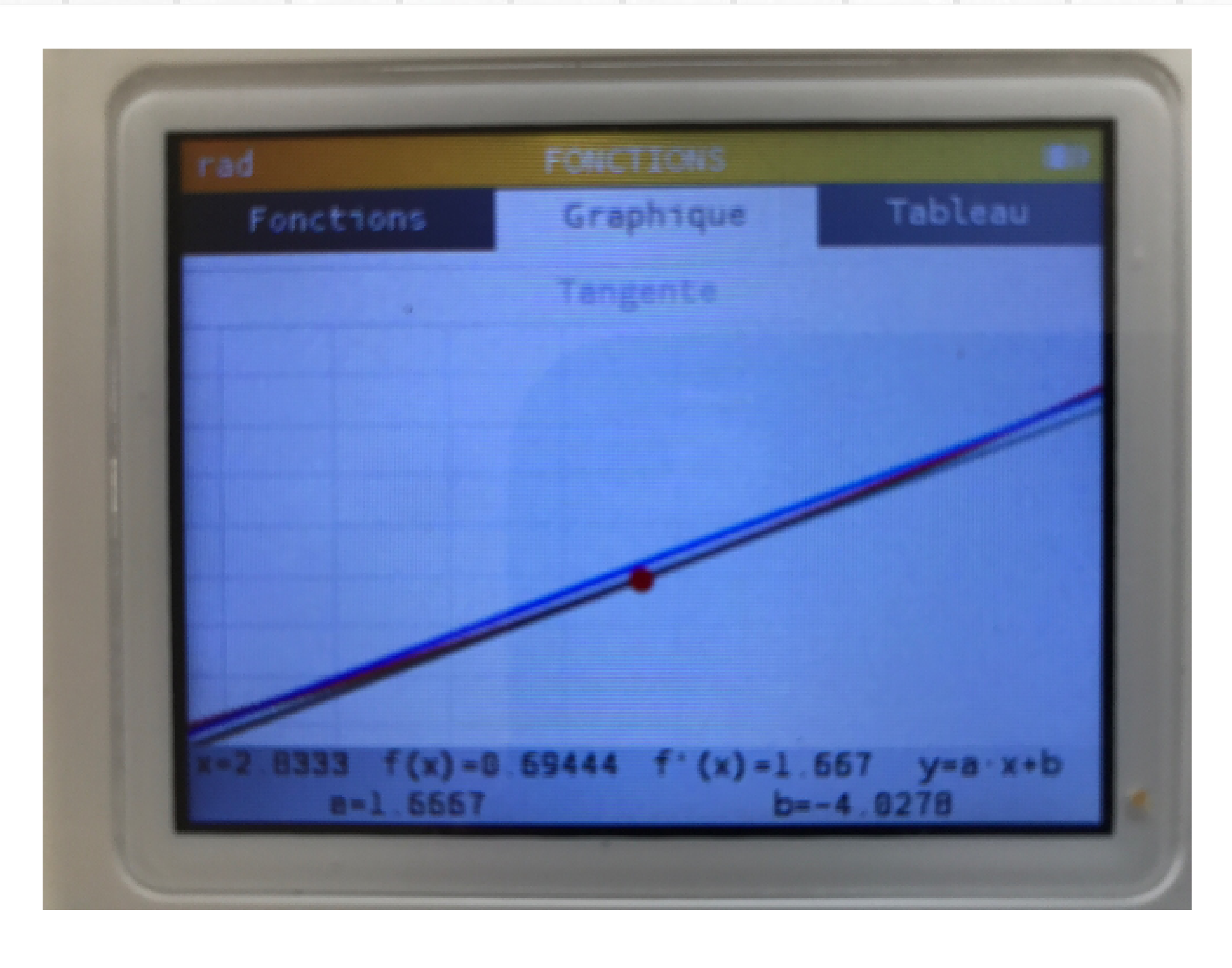
$f(\frac{17}{6}) = (\frac{17}{6})^2 - 4(\frac{17}{6}) + 4 = \frac{25}{36}$

$T: y = \frac{5}{3}(x - \frac{17}{6}) + \frac{25}{36}$

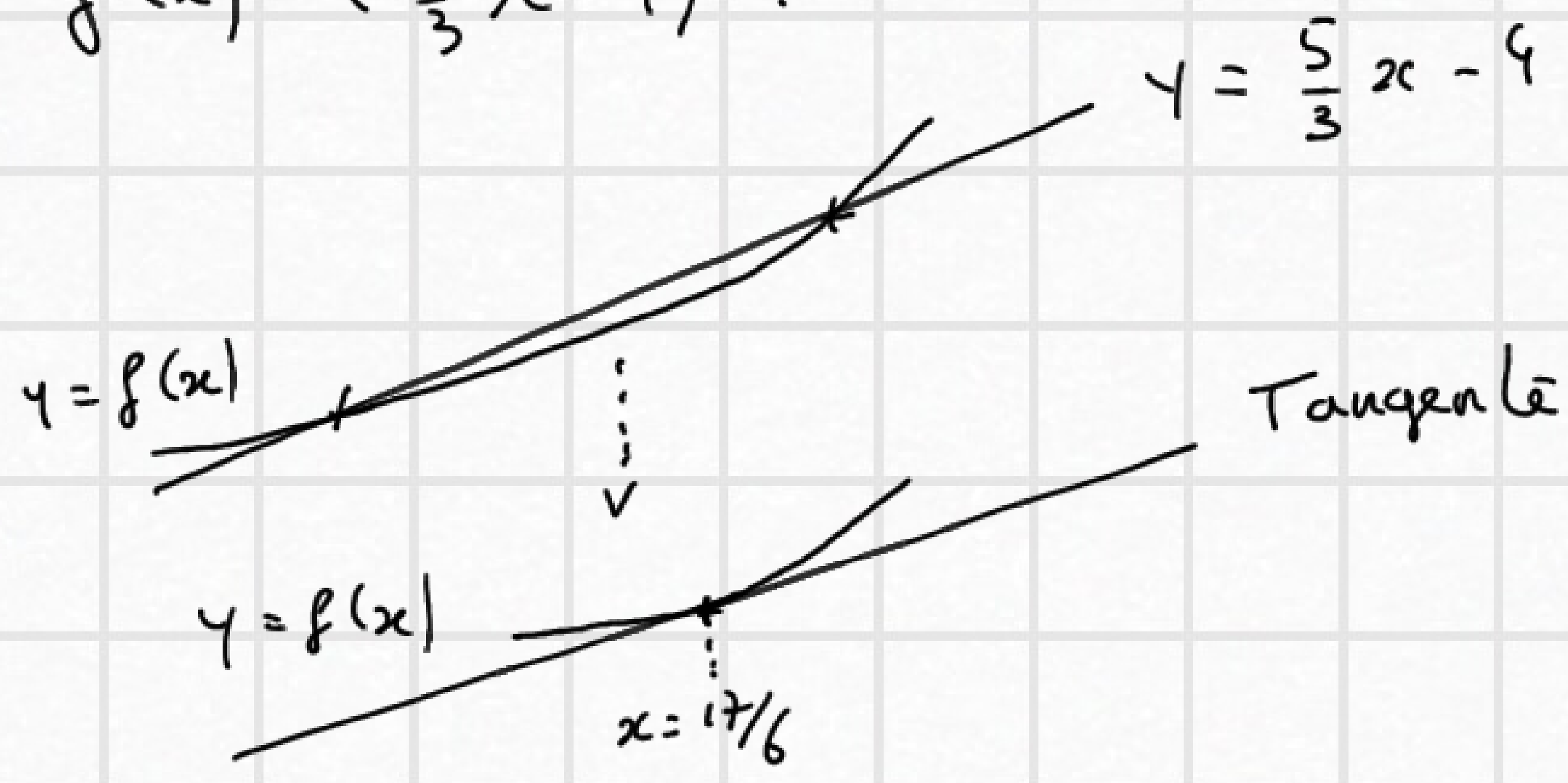
$y = \frac{5}{3}x - \frac{85}{18} + \frac{25}{36}$

$y = \frac{5}{3}x - \frac{145}{36}$ or $-\frac{145}{36} \simeq -4{,}028 \neq -4$

Donc l'équation proposée n'est pas une équation d'une tangente à la courbe.



Nous constatons sur le graphique (zoom au voisinage de $\frac{17}{6}$), que la droite proposée et la tangente ne sont pas confondues. Nous constatons aussi le changement de signe de la différence $f(x) - (\frac{5}{3}x - 4)$.



5) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.
$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative.

1) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?

2) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = 3x - 5$? Si oui, en quels points ?

1) La courbe admet des tangentes horizontales si et seulement si l'équation $f'(x) = 0$ admet des solutions.

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 + 4x + 3 = 0$

or $\Delta < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution réelle et la courbe n'admet pas de tangentes horizontales.

2) La courbe admet des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = 3x - 5$ si et seulement si l'équation $f'(x) = 3$ admet des solutions.

$f'(x) = 3 \iff 3x^2 + 4x + 3 = 3 \iff 3x^2 + 4x = 0$

$x(3x+4)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases}$

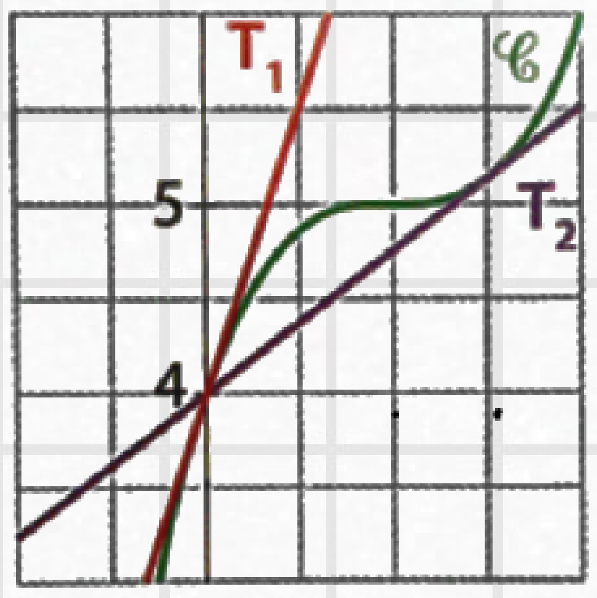
Il existe donc 2 points de $\mathcal{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur 3.

$A(0;1)$ et $B\left(-\frac{4}{3} ; -\frac{49}{27}\right)$

---

6) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=x^3-3x^2+3x+4$ et

$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative



1) Déterminer les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur 3.

2) on a tracé ci-contre une partie de la courbe $\mathcal{C}$. Il semble que par le point $A(0;4)$, on puisse mener à $\mathcal{C}$ deux tangentes. Est-ce le cas ?

---

1) Cela revient à résoudre $f'(x)=3$

a $f'(x)=3x^2-6x+3$

$f'(x)=3 \iff 3x^2-6x=0$

soit $x(x-2)=0$ et donc $\begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=2 \end{cases}$.

Il existe donc 2 points en lesquels la tangente a pour coefficient directeur 3.

2) Déterminons les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ en a :

$T_a : y = f'(a)\times(x-a)+f(a)$

$f'(a)=3a^2-6a+3$

et $f(a)=a^3-3a^2+3a+4$

Or $A(0;4) \in T_a$ donc ses coordonnées vérifie l'équation de T_a ainsi :

$4 = f'(a)(0-a)+f(a)$

$4 = -af'(a)+f(a)$

Soit $-af'(a)+f(a)-4=0$

$-a(3a^2-6a+3)+(a^3-3a^2+3a+4)-4=0$

$-3a^3+6a^2-\cancel{3a}+a^3-3a^2+\cancel{3a}+\cancel{4}-\cancel{4}=0$

$-2a^3+3a^2=0$

$a^2(-2a+3)=0 \quad \begin{cases} a=0 \\ \text{ou} \\ a=3/2 \end{cases}$

Nous retrouvons l'abscisse de A : 0

$A(0;4)$ et $B\left(\frac{3}{2} ; \frac{41}{8}\right)$ sont les 2 points solution.

---

7) Algorithmique.

La fonction f est la fonction carré.

1) Exécuter pas à pas l'algorithme suivant en dressant le tableau d'état des variables.

```
VARIABLES :          h, k sont des nombres
INITIALISATION :     h prend la valeur 1
TRAITEMENT ET SORTIES :
                     Pour k de 1 à 4 Faire
                       | d prend la valeur (f(3+h)−f(3))/h
                       | Afficher h et d
                       | h prend la valeur h/10
                     Fin Pour
```

2) Quelle conjecture émettre sur $f'(3)$? La prouver.

3) Programmer cet algorithme en Python et le faire fonctionner.

---

1)

k	/	1	2	3	4
h	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
d	/	7	6,1	6,01	6,001

2) Il semble que :

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} \to 6 \text{ qand } h \to 0$$

donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = 6$ et ainsi

$f'(3)=6$. Ce qui est bien le cas puisque $f(x)=x^2$ et $f'(x)=2x$ donc $f'(3)=2\times 3=6$.

3)