Études de fonctions

1) $f(x) = -3x + 2$ sur $\mathbb{R}$

2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3$ sur $\mathbb{R}$

3) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + \frac{x^2}{2} + 3$ sur $\mathbb{R}$

4) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

5) $f(x) = 1 - x - \frac{1}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

6) $f(x) = (3-x)\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$

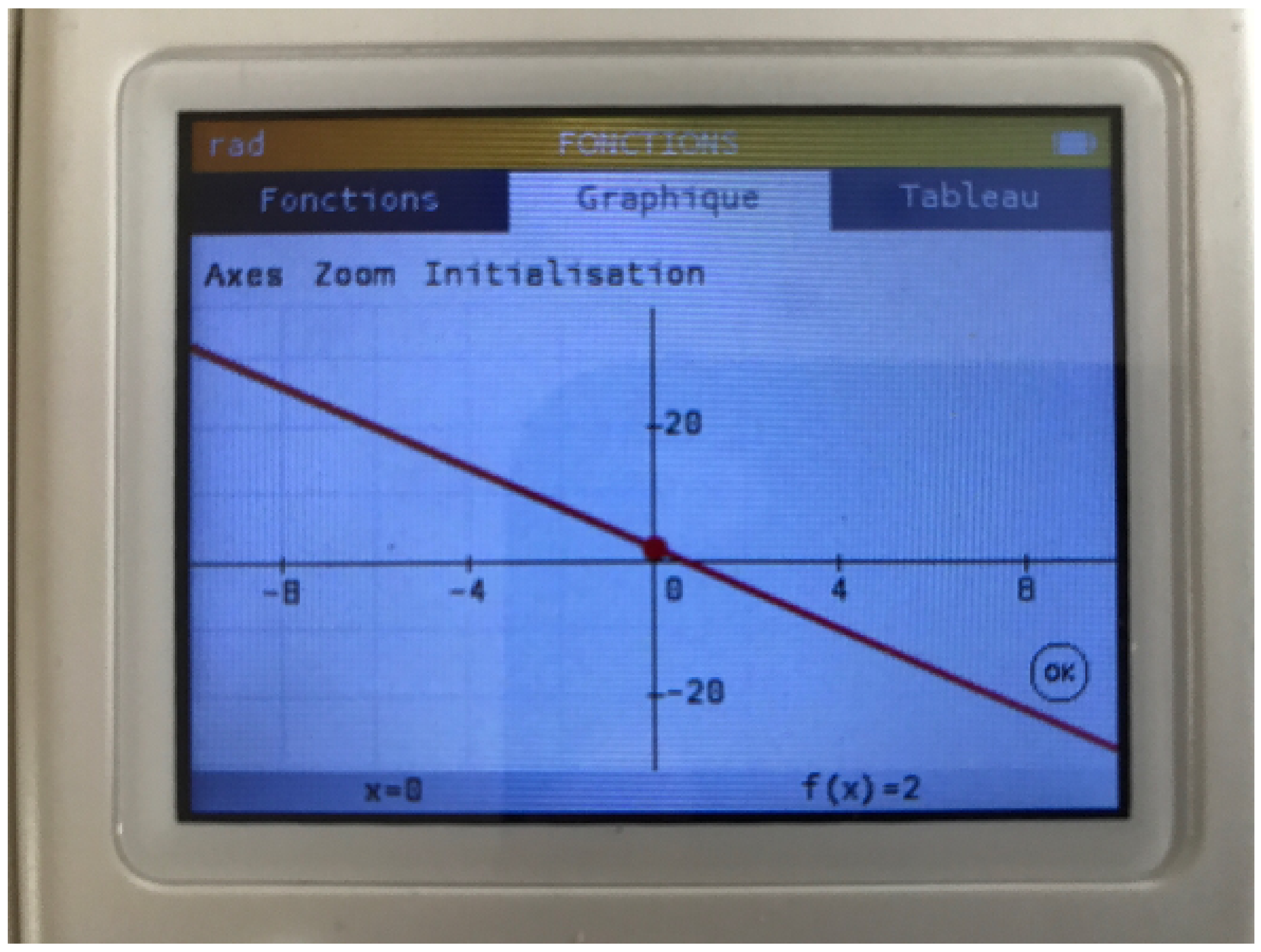
7) $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 6}$ sur $\mathbb{R}$

8) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5$ sur $\mathbb{R}$

1) $f(x) = -3x + 2$

$f'(x) = -3$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	
Variations de f.		$\searrow$	



La courbe représentative de f ne possède pas de tangentes horizontales car la dérivée ne s'annule pas.

---

2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3$ sur $\mathbb{R}$

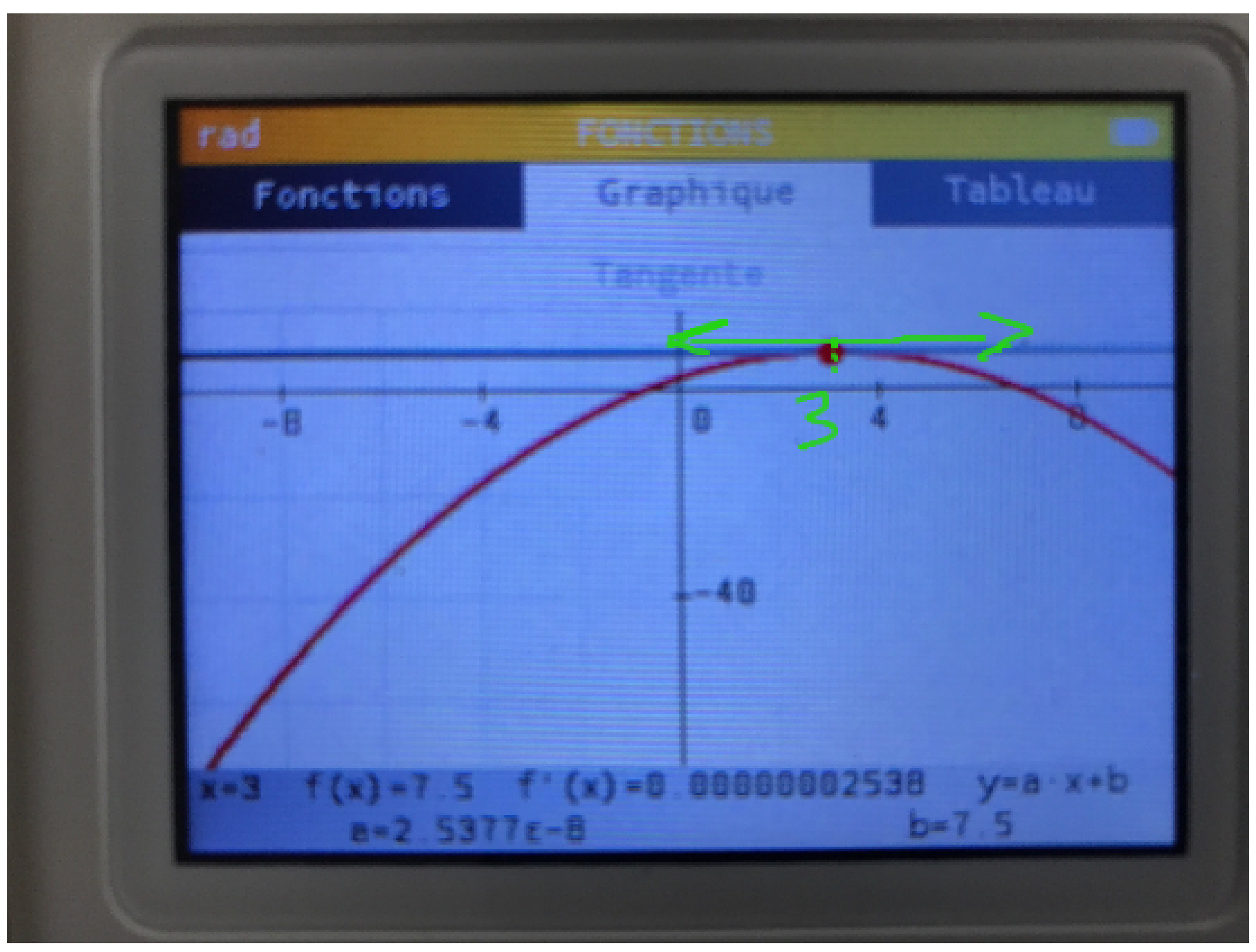
$f'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x + 3 = -x + 3$

$f'(x) \geqslant 0 \iff -x + 3 \geqslant 0 \iff 3 \geqslant x$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f.		$\nearrow$	$\frac{15}{2}$	$\searrow$	

$f(3) = -\frac{1}{2} \times 9 + 9 + 3 = -\frac{9}{2} + 9 + 3$

$= \frac{9}{2} + \frac{6}{2} = \frac{15}{2}$



La courbe possède une tangente horizontale au point d'abscisse 3 car $f'(3) = 0$ et admet un maximum en $x = 3$ car la dérivée est positive puis négative.

3) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + \frac{x^2}{2} + 3$ sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2 \times 4x^3 - 3 \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x$

$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + x$

$f'(x) = x(8x^2 - 9x + 1)$.

Calcul des racines de $f'(x)$: $f'(x) = 0$

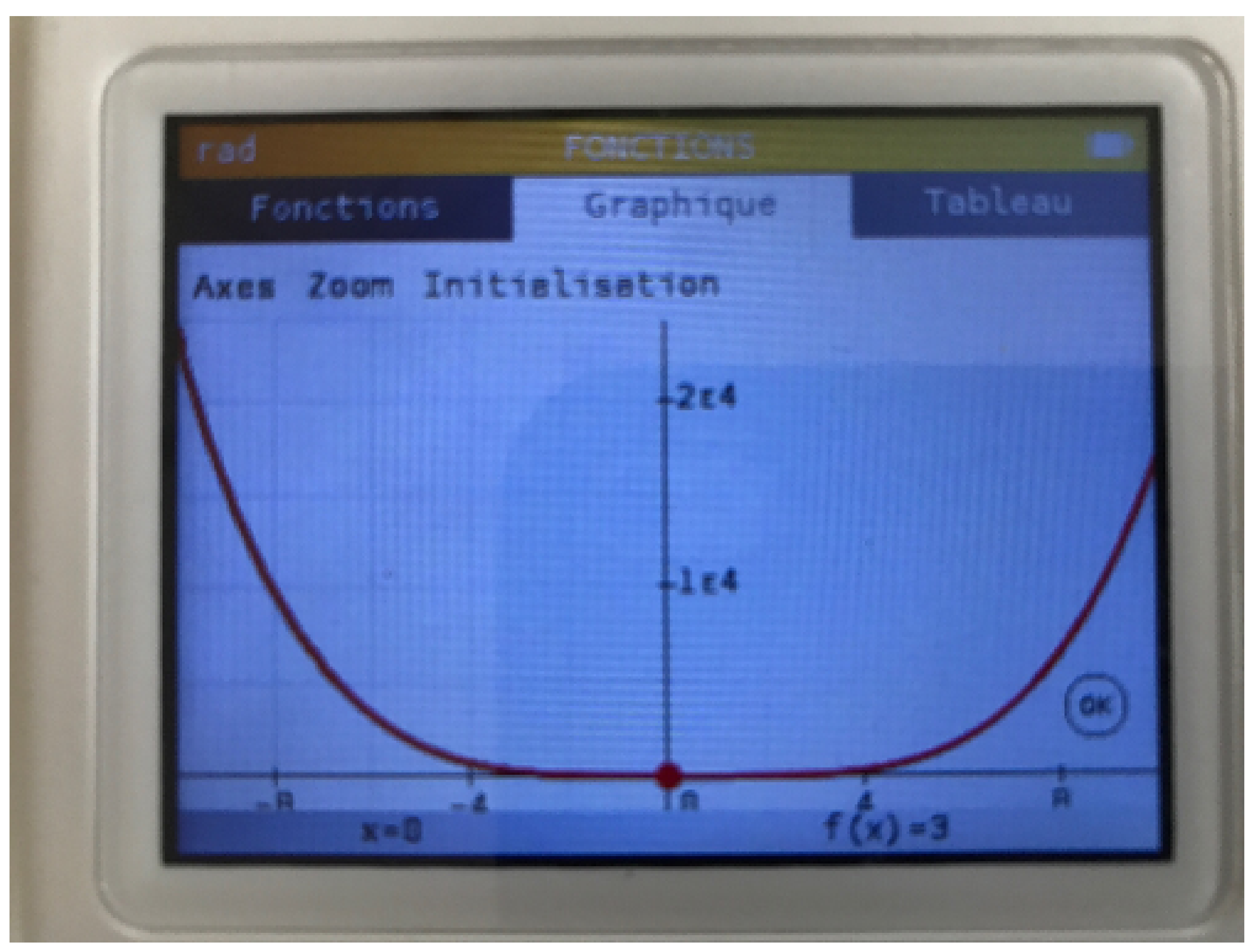
$x = 0$ et $8x^2 - 9x + 1 = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{8}$		1		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $8x^2 - 9x + 1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$1/8$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	3	$\nearrow$	$f(\frac{1}{8}) \simeq 3{,}002$	$\searrow$	$2{,}5$	$\nearrow$	



Ici les variations de f sont très faibles entre 0 et $1/8$ (et même 1). L'affichage à la calculatrice ne nous permet pas de les voir à cette échelle.

4) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+4}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2) - (x^2+2x+4)(2x)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{2x^3+2x^2 - (2x^3+4x^2+8x)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{2x^3+2x^2-2x^3-4x^2-8x}{(x^2)^2} = \frac{-2x^2-8x}{(x^2)^2} = \frac{-2x(x+4)}{(x^2)^2}$$

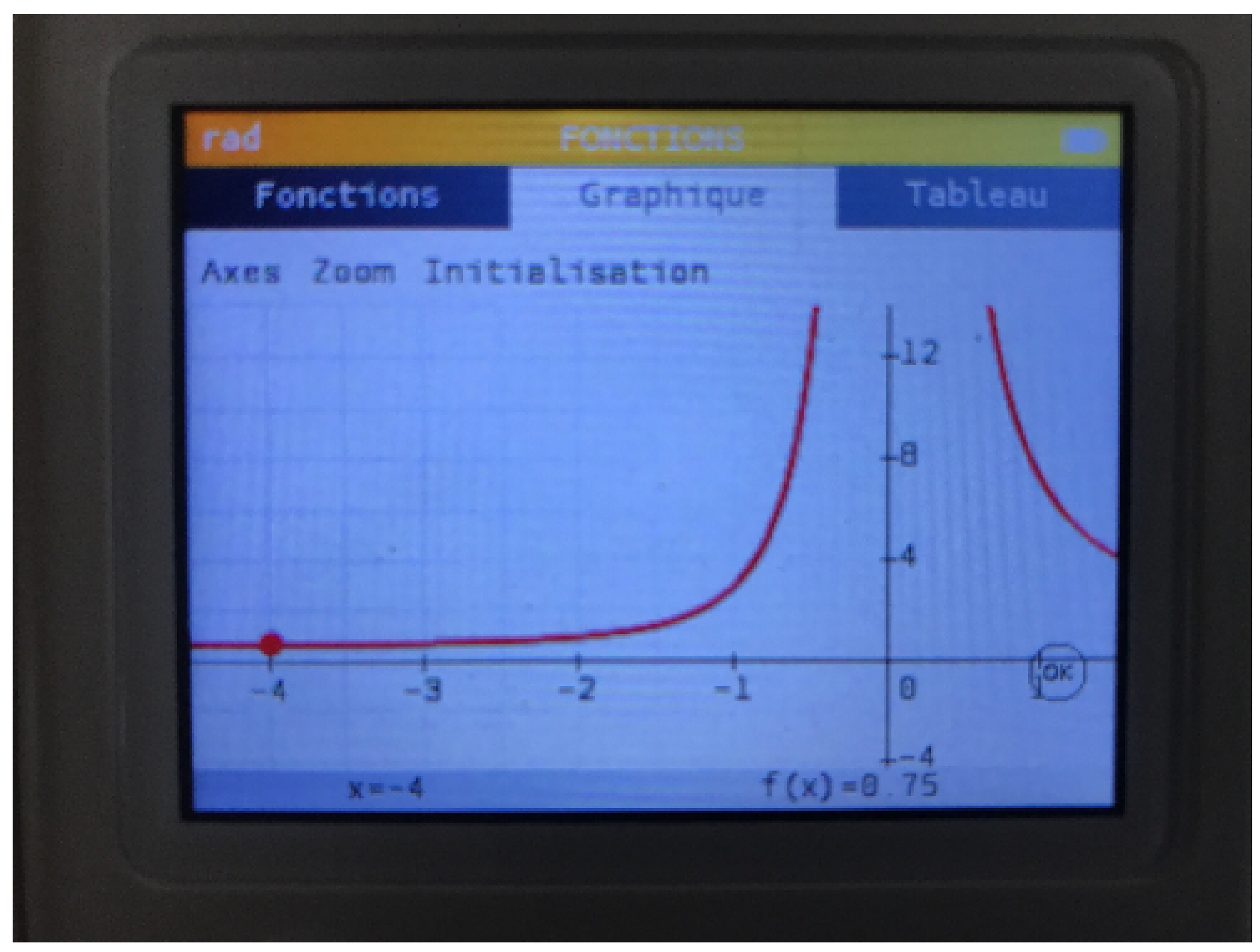
Dans la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$, $v^2>0$ donc si on manipule v^2 (simplification, disparition du carré, ...), l'étude du signe du dénominateur devient OBLIGATOIRE. Donc le mieux est de ne pas y toucher si on n'en a pas besoin.
Dans ce cas le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur.
Attention de ne pas oublier les doubles barres aux valeurs interdites.

Signe de $f'(x)$

Le numérateur possède 2 racines 0 et -4. Il est négatif à l'extérieur de ces racines.

Tableau de variations

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
variations de f		$\searrow$	$3/4$	$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$	



Ici encore le minimum de f atteint en -4 est presque invisible à cette échelle ce qui justifie l'importance de l'étude des variations.

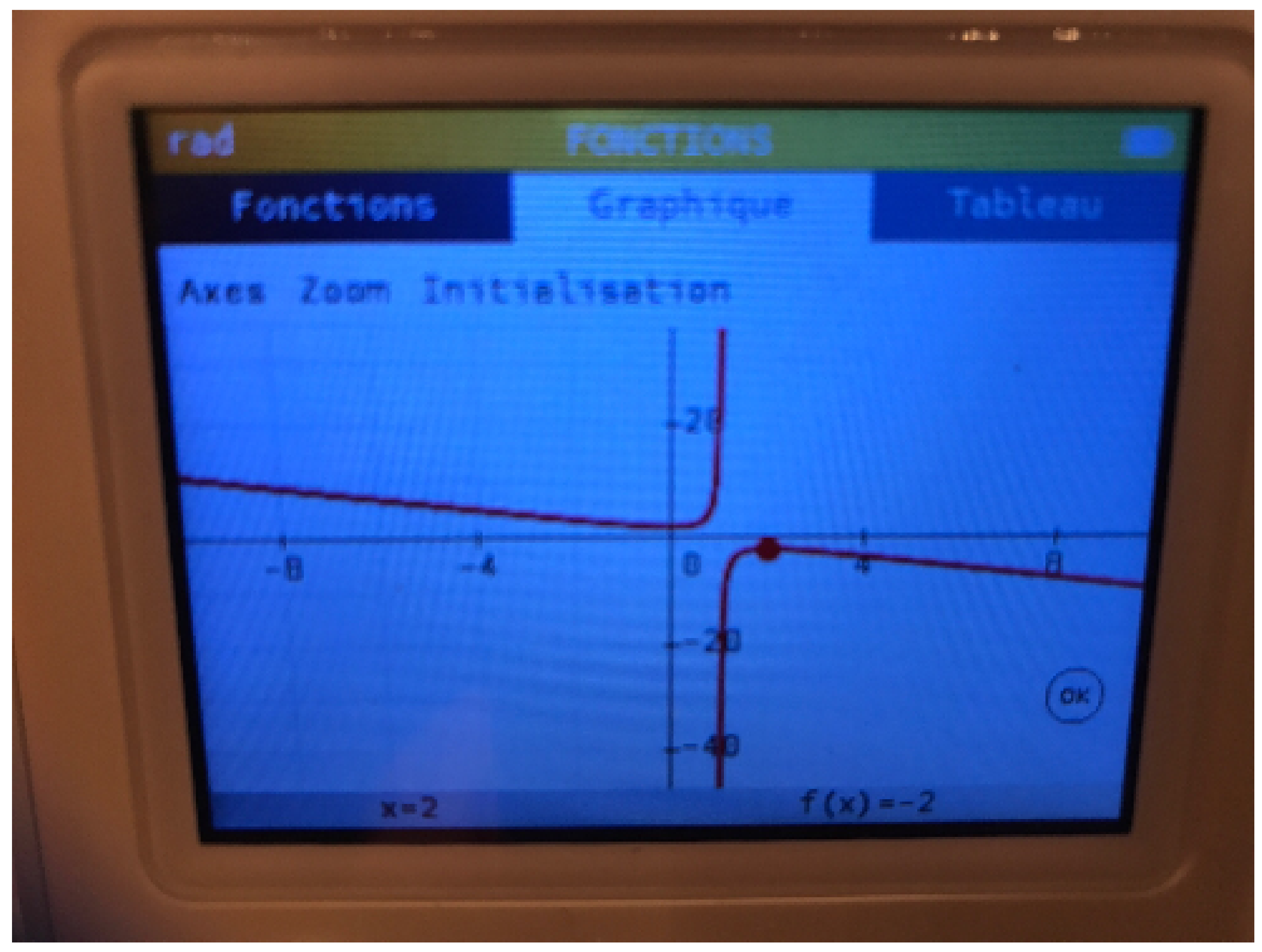
5) $f(x) = 1 - x - \dfrac{1}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)^2+1}{(x-1)^2} = \frac{-(x^2-2x+1)+1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-x^2+2x-1+1}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2} = \frac{x(-x+2)}{(x-1)^2}$$

Le dénominateur est strictement positif donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur qui est du 2nd degré dont les 2 racines sont 0 et 2 et dont le coefficient des "x^2" est négatif.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
variations de f		↘	2	↗	||	↗	-2	↘	



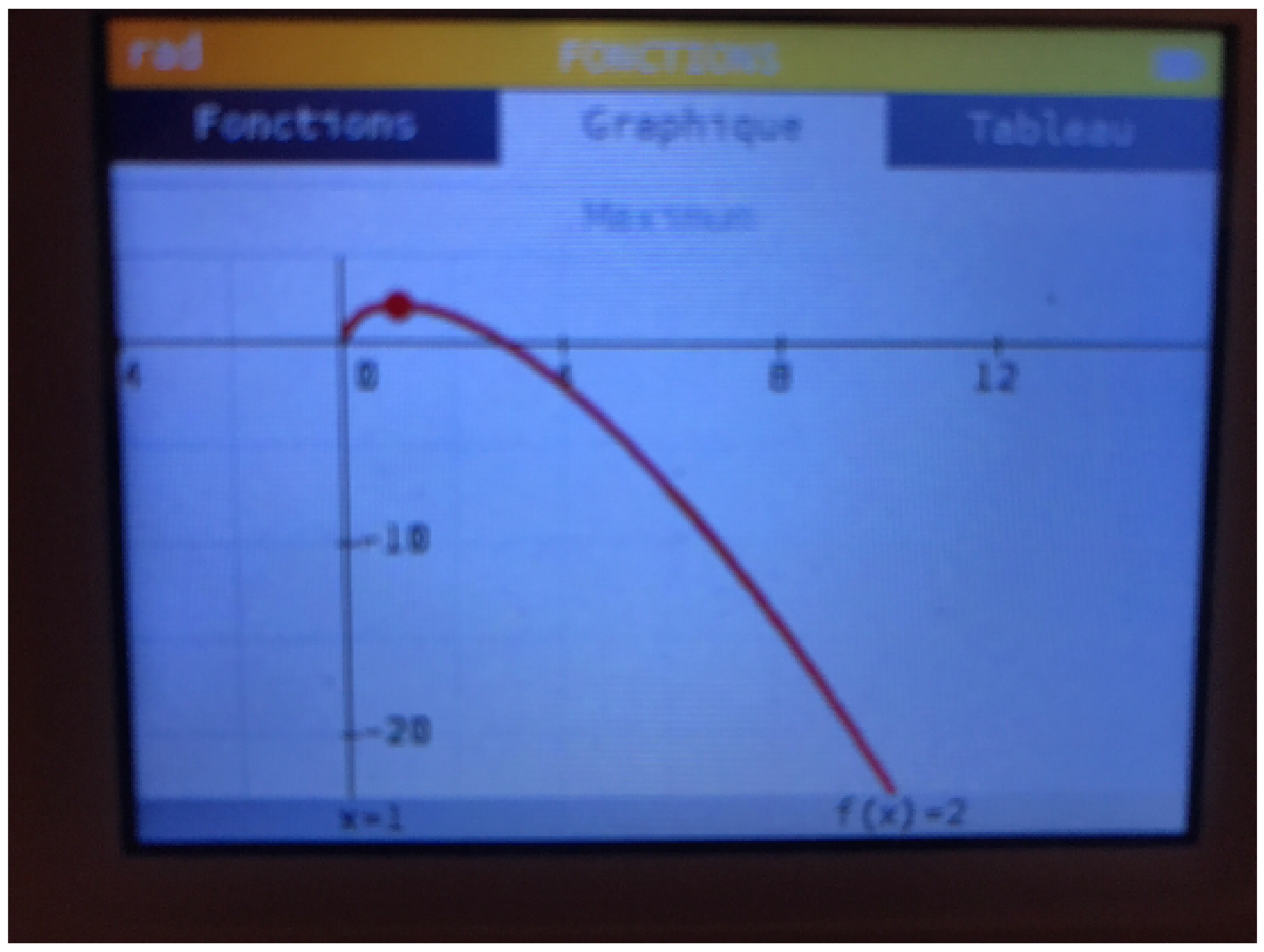
6) $f(x) = (3-x)\sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$

$$f'(x) = -1\sqrt{x} + (3-x) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{x}(2\sqrt{x}) + (3-x)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-2x+3-x}{2\sqrt{x}} = \frac{3-3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3(1-x)}{2\sqrt{x}}$$

$f'(x)$ est du signe de $1-x$ d'où le tableau de variations :

x	0		1	
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$
Variations de f.	$\Vert$ 0	$\nearrow$	2	$\searrow$



7) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 6}$ sur $\mathbb{R}$ (Δ Denominateur < 0 donc $x^2 - 2x + 6 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$)

$$f'(x) = \frac{(4x-4)(x^2-2x+6) - (2x-2)(2x^2-4x+4)}{(x^2-2x+6)^2}$$

on nomme ce dénominateur D

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 8x^2 + 24x - 4x^2 + 8x - 24 - (4x^3 - 8x^2 + 8x - 4x^2 + 8x - 8)}{D}$$

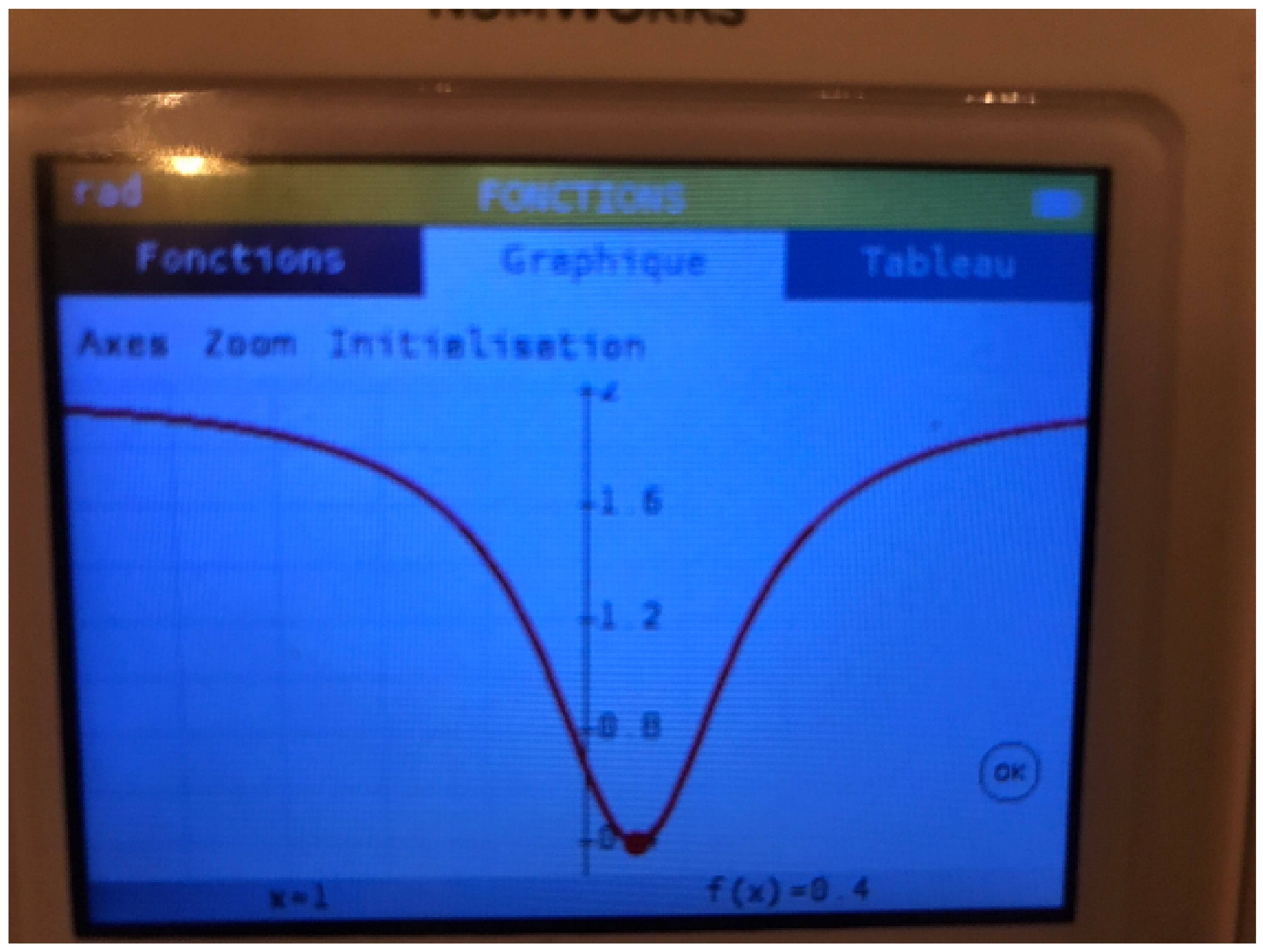
$$f'(x) = \frac{4x^3 - 12x^2 + 32x - 24 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 8}{D}$$

$$f'(x) = \frac{16x - 16}{D} = \frac{16(x-1)}{(x^2-2x+6)^2}$$

$f'(x)$ est du signe de $16(x-1)$ donc de $x - 1$.

D'où le tableau de variations.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f.		$\searrow$	$\frac{2}{5}$	$\nearrow$	



8) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5$ sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2$

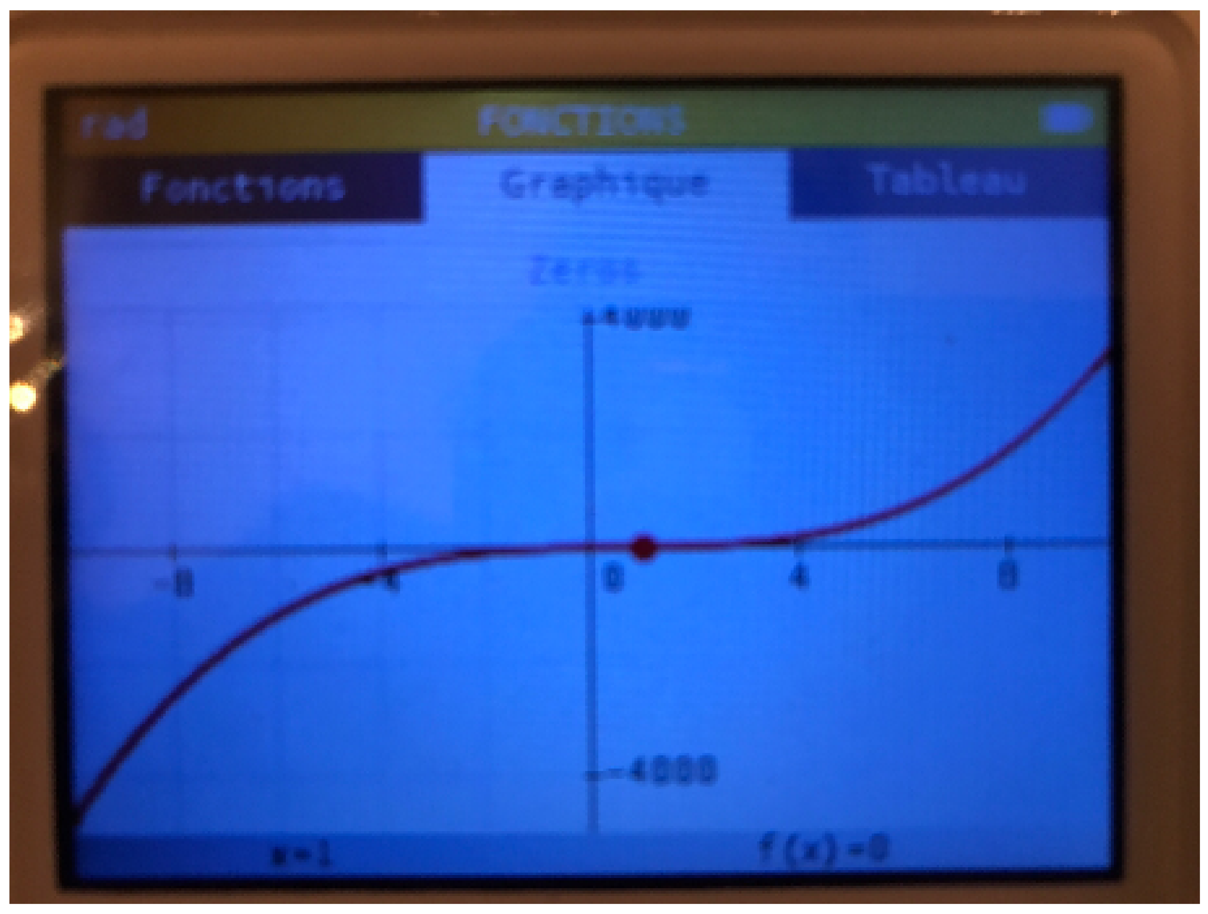
Le problème ici est que $f'(x)$ n'est pas factorisable avec les techniques à notre disposition. Il est dans certains cas, possible d'obtenir le signe de $f'(x)$ avec ses variations. Il faut donc pour cela calculer $f''(x)$.

$f''(x) = 12x^2 - 12x + 4 = 4(3x^2 - 3x + 1)$

$\Delta_{f''} < 0$ donc $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et ainsi f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où le tableau de variations de f' (par def !)

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		+	
Variations de f'		↗	



$\boxed{f'}$

or la calculatrice nous permet de constater que $f'(1) = 0$.
On peut donc en déduire le signe de $f'(x)$ à partir de ses variations.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
variations de f'		↗	0	↗	
Signe de f'		$-$	0	$+$	

Variations de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f.		↘	4	↗	

$\boxed{f}$