Problèmes d'Economie

Problème 1

Une entreprise fabrique et vend un produit imperméabilisé pour vêtements et équipements de randonnée. La quantité hebdomadaire produite x (en litres) varie entre 0 et 1 000.

Le coût de fabrication, en euros, de x litres est donné par :

$$C(x) = \frac{x^3}{1000} - \frac{x^2}{20} + 40x + 5000.$$

La recette, en euros, est donnée par $R(x) = -0{,}2x^2 + 640x$.

1. On appelle $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x litres de produit. Exprimez $B(x)$ en fonction de x et étudiez les variations de la fonction B sur $[0 ; 1000]$.

2. Quelle quantité doit fabriquer l'entreprise pour que son bénéfice soit maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

Problème 2

Une entreprise fabrique des articles de maroquinerie.

- **Le coût de fabrication**, en euros, de n articles a été modélisé, pour $x \in [0 ; 90]$, par la fonction :

$$C(x) = x^3 - 90x^2 + 2700x + 8836.$$

- **Le coût marginal** est le coût de fabrication d'une unité supplémentaire. On considère que le coût marginal est égal à la dérivée du coût total. On le note C_m.
- **Le coût moyen** est le coût d'un article. On le note C_M.

1. Donnez les expressions de $C_m(x)$ et $C_M(x)$ pour $x \neq 0$.

2. Démontrez que la dérivée du coût moyen est égale à :

$$C'_M(x) = \frac{(x-47)(2x^2+4x+188)}{x^2}.$$

3. Étudiez les variations de C_M et vérifiez que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

4. Contrôlez la réponse à la question précédente en affichant à l'écran de votre calculatrice les courbes des fonctions C_m et C_M.
Vous prendrez comme fenêtre $0 < x < 90$ et $0 < y < 5000$.

Remarque :
Ce résultat se généralise : le coût moyen atteint sa valeur minimale lorsqu'il est égal au coût marginal.

11) $B(x) = R(x) - C(x)$

$$B(x) = \left(-0{,}2x^2 + 640x\right) - \left(\frac{x^3}{1000} - \frac{x^2}{20} + 40x + 5000\right)$$

$$B(x) = -\frac{x^3}{1000} - \frac{3}{20}x^2 + 600x - 5000$$

$$B'(x) = -\frac{3x^2}{1000} - \frac{6x^2}{20} + 600 \qquad \begin{cases} x_1 = -500 \\ x_2 = 400 \end{cases}$$

x	0		400		1000
Signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de B	-5000	$\nearrow$	$147\,000$	$\searrow$	$-555\,000$

12) Pour faire un bénéfice maximal, l'entreprise doit fabriquer et vendre 400 L pour un bénéfice de 147000 €

21) $C(x) = x^3 - 90x^2 + 2700x + 8836$

$$C_m(x) = 3x^2 - 180x + 2700$$

22)

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^3 - 90x^2 + 2700x + 8836}{x}$$

$$C'_M(x) = \frac{(3x^2 - 180x + 2700)x - (x^3 - 90x^2 + 2700x + 8836)}{x^2}$$

$$C'_M(x) = \frac{3x^3 - 180x^2 + 2700x - x^3 + 90x^2 - 2700x - 8836}{x^2}$$

$$C'_M(x) = \frac{2x^3 - 90x^2 - 8836}{x^2}$$

or $(x-47)(2x^2 + 4x + 188) =$
$2x^3 + 4x^2 + 188x - 94x^2 - 188x - 8836 =$
$2x^3 - 90x^2 - 8836$

donc $C'_M(x) = \dfrac{(x-47)(2x^2 + 4x + 188)}{x^2}$

23)
Le dénominateur est strictement positif.
Le numérateur est un produit dont l'un des facteurs est du premier degré et l'autre du second degré dont le discriminant est strictement négatif. Ce facteur est donc strictement positif sur $]0;90]$. Ainsi $C'_M(x)$ est du signe de $x-47$,
$C'_M(x) \geqslant 0 \iff 47 \leqslant x \leqslant 90$.
Donc C_M est strictement décroissant sur $]0;47]$ et strictement croissant sur $[47;90]$
d'où le tableau de variations :

x	0		47		90
Signe de $C'_M(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de C_M	‖	↘	867	↗	$C_M(90)$

$C_M(90) \simeq 2798,178$

$$C_m(47) = 3\times 47^2 - 180\times 47 + 2700$$
$$= 867$$

Le coût moyen est bien minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

23)