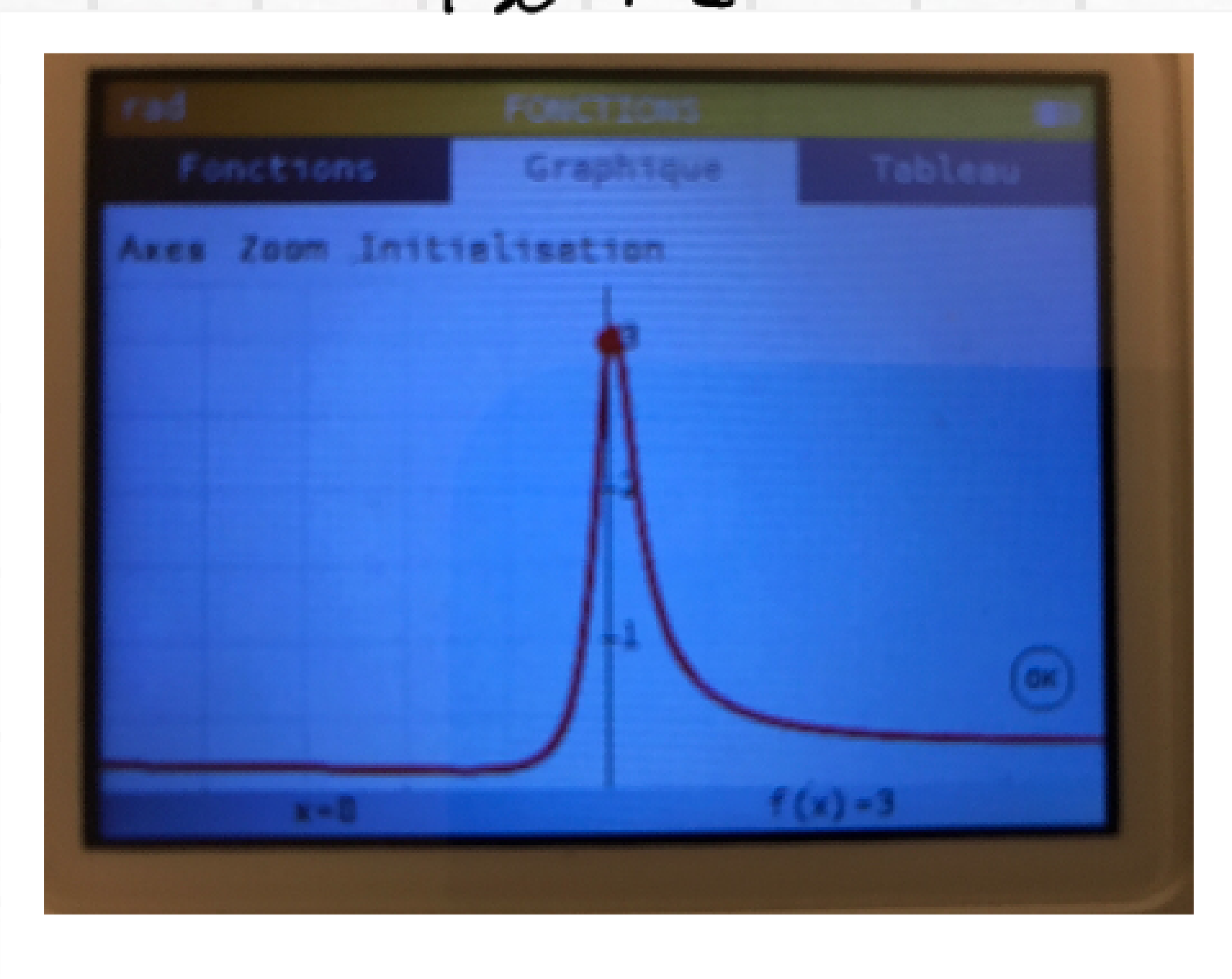
Extrema - Optimisation

1) A l'aide d'une calculatrice, on a obtenu la courbe représentative représentant la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{4x^2+1}$.



Elle semble atteindre un maximum local en 0. Est-ce bien le cas ?

1) $f'(x) = \dfrac{(2x+2)(4x^2+1) - (x^2+2x+3)\times 8x}{(4x^2+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{\cancel{8x^3} + 2x + 8x^2 + 2 - \cancel{8x^3} - 16x^2 - 24x}{(4x^2+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-8x^2 - 22x + 2}{(4x^2+1)^2}$

Les 2 racines du numérateur sont :

$x_1 = \dfrac{-11+\sqrt{137}}{8} \simeq 0{,}088$

$x_2 = \dfrac{-11-\sqrt{137}}{8} \simeq -2{,}84$

$f'(x)$ est du signe de son numérateur, négatif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$\frac{-11-\sqrt{137}}{8}$		$\frac{-11+\sqrt{137}}{8}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\searrow$	$f\left(\frac{-11-\sqrt{137}}{8}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{-11+\sqrt{137}}{8}\right)$	$\searrow$	

Le maximum local n'est pas atteint en $x=0$ mais en

$x = \dfrac{-11+\sqrt{137}}{2} \simeq 0{,}08$.

2) a) Etudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

b) Démontrer que quelque soit le nombre $x>0$, la somme de x et de son inverse est supérieure ou égale à 2.

a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ pour $x \in]0;+\infty[$

$x^2>0$ et $x^2-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$ car $x>0$

d'où le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	‖	$\searrow$	2	$\nearrow$	

b) D'après les variations de f, f atteint son minimum 2 en $x=1$ sur $]0;+\infty[$

Donc pour tout $x>0$, $f(x) \geqslant 2$ et ainsi pour tout $x>0$ $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

3) f est la fonction définie sur IR par $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations

2) Préciser les extrema locaux de f.

3) Dans chaque cas, donner un encadrement de $f(x)$ lorsque x vérifie la condition donnée :

a) $x \in [-2; 1]$

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
Signe de $4x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $x^2 - 4$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		0	1	2	3	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		↘	-14	↗	2	↘	-14	11 ↗	

2) f possède 3 extremums locaux.

1 maximum local en $x = 0$ qui vaut 2

2 minima en $x = -2$ et $x = 2$ qui valent -14.

3) En utilisant le tableau des variations

- Si $-2 \leqslant x \leqslant 1$ alors $-14 \leqslant f(x) \leqslant 2$
- $f(3) = 11$

  Si $0 \leqslant x \leqslant 3$ alors $-14 \leqslant f(x) \leqslant 11$
- Si $-2 \leqslant x \leqslant 2$ alors $-14 \leqslant f(x) \leqslant 2$

---

3) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$

a) Etudier les variations de f.

b) En déduire le minimum sur $\mathbb{R}$ de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

---

a) $f'(x) = -4x + 4$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗	-1	↘	
variations de $g = \frac{1}{f}$		↘	-1	↗	

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant -1 < 0$

donc $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ est définie.

$f < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f et $\frac{1}{f}$ ont des sens de variations contraires

car $g' = \left(\dfrac{1}{f}\right)' = \dfrac{-f'}{f^2}$

donc g' est du signe de $-f'$, d'où l'inversion des variations.

g atteint donc son minimum -1 en $x = 1$.

---

4) Avec la dérivée de la dérivée

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 5$

On note f' la dérivée de f et f'' la dérivée de f' (se lit f "seconde").

1) Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.

2) En déduire les variations de f'

3) Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de $f'(x)$.

4) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

---

1) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2$

$f''(x) = 12x^2 - 12x + 4$

$\Delta_{f''} < 0$ donc $f''(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de $f''(x)$		+	
variations de f'	↗	0	↗

$f'(1) = 4\times1^3 - 6\times1^2 + 4\times1 - 2 = 0$

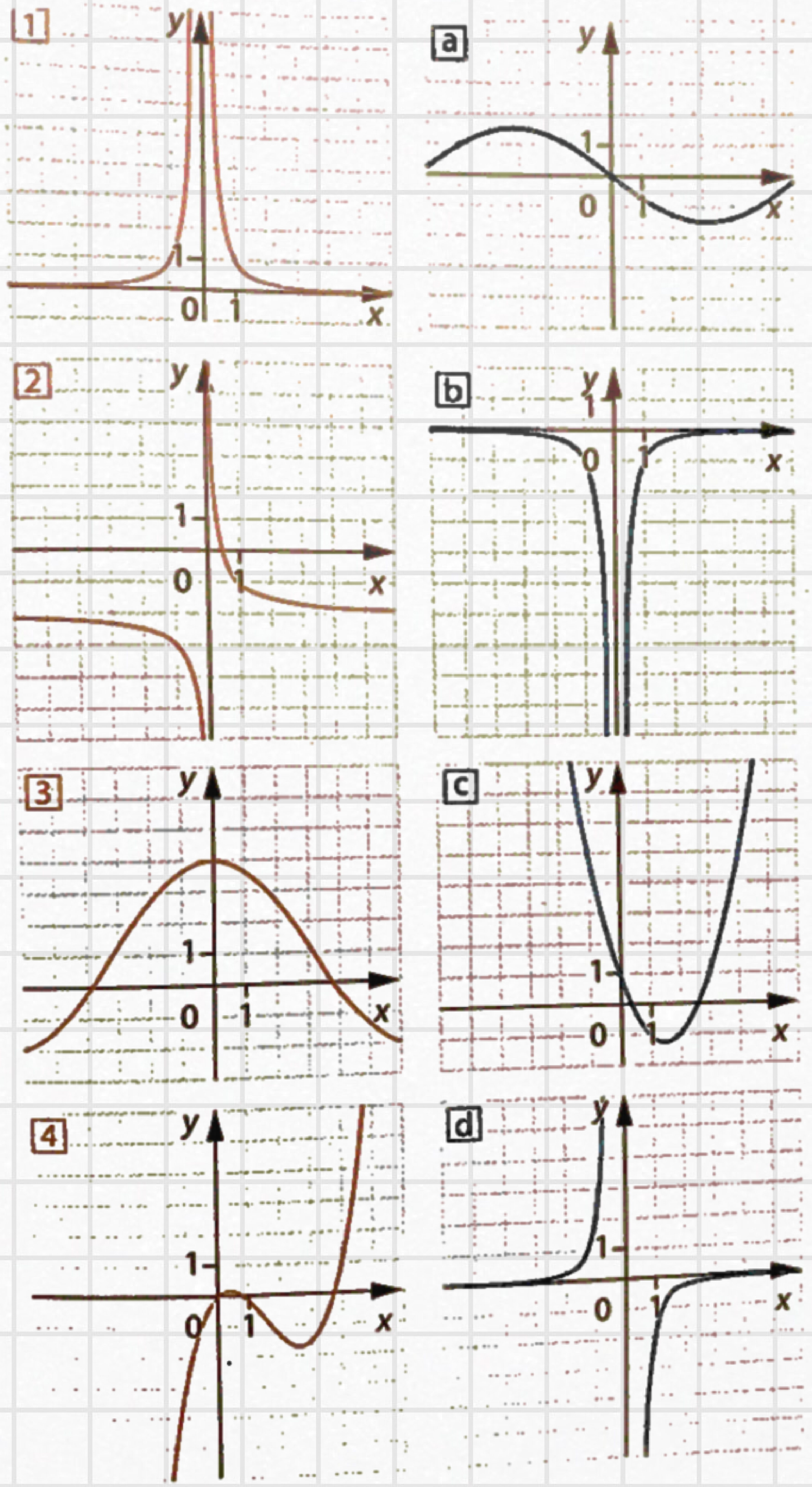
3) f' est strictement croissante et $f'(1)=0$

donc $f'(x) \leq 0$ pour $x \leq 1$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$

4)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	+
variations de f	↘	4	↗

5) On donne les courbes de quatre fonctions de 1 à 4 et celles de leur dérivée a à d.
Associer les fonctions à leur fonction dérivée.



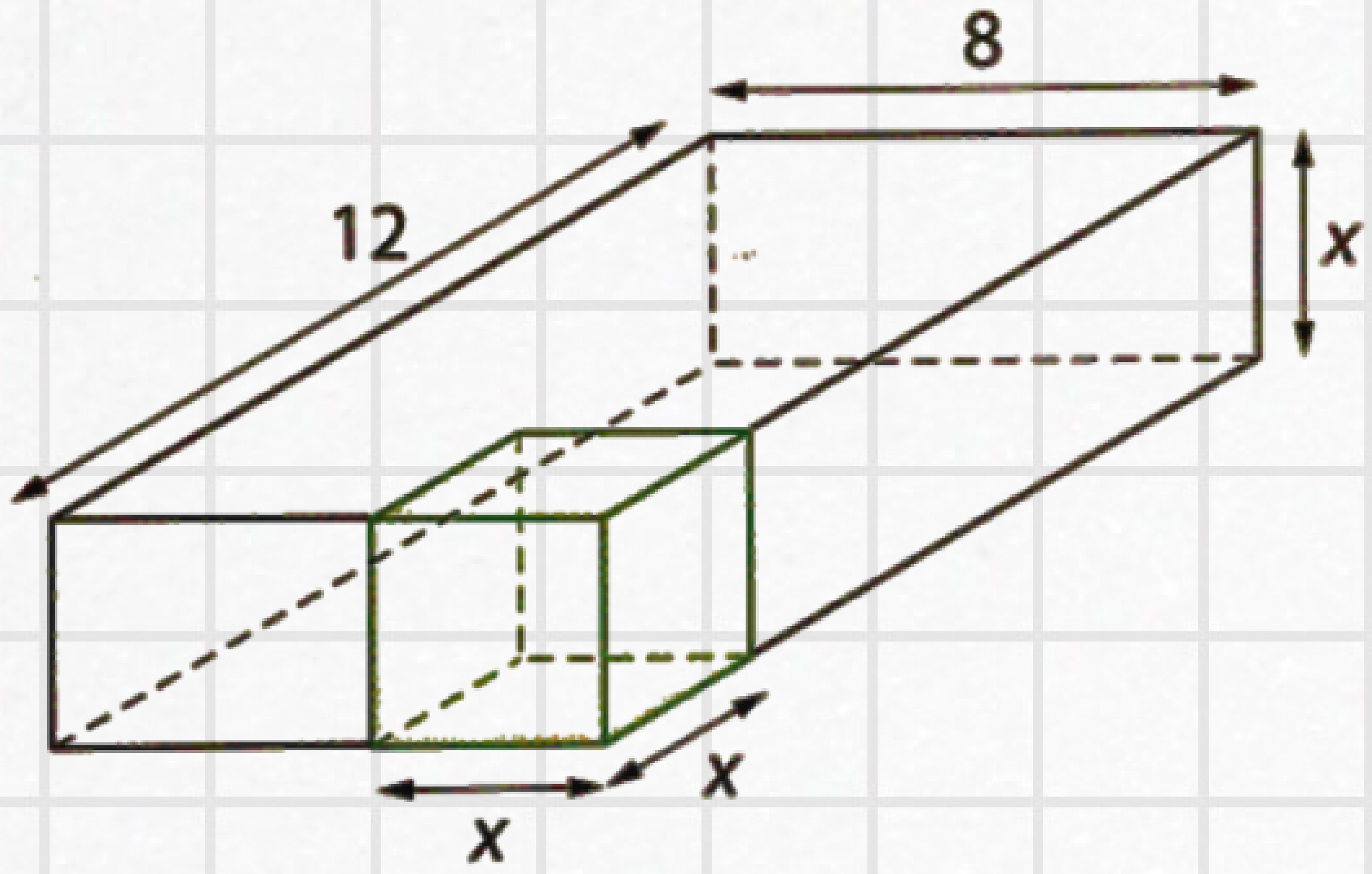
Le signe de f' est lié aux variations de f.

1 <-> d 3 <-> a

2 <-> b 4 <-> c

6) Un cube

Dans une pièce de bois parallélépipédique de longueur 12, de largeur 8 et d'épaisseur x (en cm), on extrait un cube d'arête x.



Comment choisir x pour que le volume restant soit maximal ?

Volume du parallélépipède :

$12 \times 8 \times x = 96x$

Volume du cube : x^3

Notons $f(x)$ le volume restant.

$f(x) = 96x - x^3$

$f'(x) = 96 - 3x^2$

$x \in [0; +\infty[$ donc $f'(x) \geq 0$

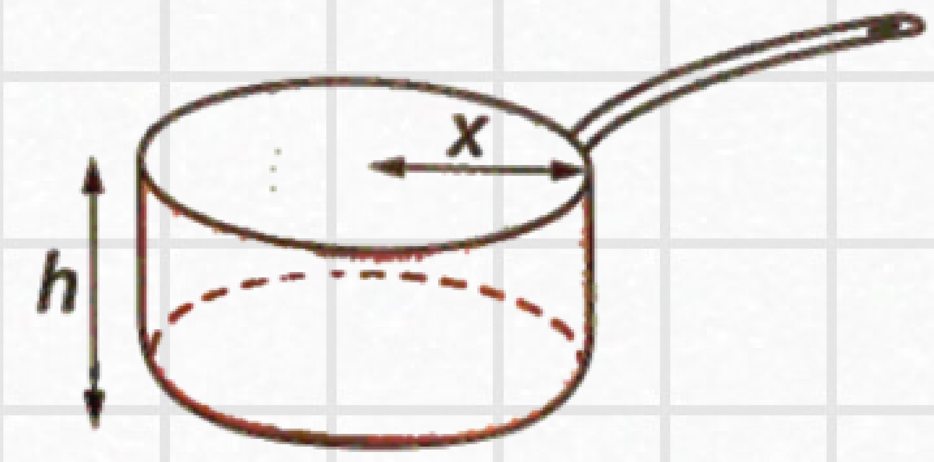
pour $0 \leq x \leq \sqrt{32}$

x	0		$\sqrt{32}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variation de f	0	$\nearrow$	$f(\sqrt{32})$	$\searrow$	

Le volume restant est maximal pour $x = \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 16} = 4\sqrt{2}$ cm et vaut $256\sqrt{2}$ cm^3

7) Les proportions d'une casserole économique

Vous êtes-vous demandé pourquoi la hauteur d'une casserole est approximativement égale à son rayon quelle que soit sa contenance ?



Pour répondre à cette question, on se propose de résoudre le problème suivant :

Comment fabriquer une casserole de volume v donné avec le moins de métal possible ?

On suppose que le prix de revient du manche ne dépend pas des dimensions de la casserole.

L'unité est le centimètre. On note x le rayon du cercle du fond, h la hauteur et $\mathcal{S}$ l'aire totale, égale à l'aire latérale plus l'aire du fond.

1. a) Démontrez que $h = \dfrac{v}{\pi x^2}$.

b) Démontrez que $\mathcal{S}(x) = \pi x^2 + \dfrac{2v}{x}$.

2. a) Étudiez sur $]0; +\infty[$ les variations de la fonction :

$$\mathcal{S} : x \mapsto \pi x^2 + \frac{2v}{x}.$$

b) Concluez en montrant que $h = x$.

1) a) $\pi x^2 \times h = V$ donc $h = \dfrac{V}{\pi x^2}$

b) Il faut du métal pour le fond d'aire πx^2 et le coté qui est un rectangle de largeur de perimètre du cercle $2\pi x$ et pour hauteur h.

Donc d'aire $2\pi x h = 2\pi x \times \dfrac{V}{\pi x^2} = \dfrac{2V}{x}$.

Donc $\mathcal{S}(x) = \pi x^2 + \dfrac{2V}{x}$

2a) $f(x) = \pi x^2 + \dfrac{2V}{x}$

$$f'(x) = 2\pi x - \frac{2V}{x^2} = \frac{2\pi x^3 - 2V}{x}$$

$f'(x) \geq 0 \iff 2\pi x^3 - 2V \geq 0 \iff x^3 \geq \dfrac{V}{\pi}$

donc $x \geq \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$

donc f atteint son minimum pour

$x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$

x	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		$\searrow$	$f\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)$	$\nearrow$	

3) $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} = \sqrt[3]{hx^2}$

car $h = \dfrac{V}{\pi x^2} \iff \dfrac{V}{\pi} = hx^2$

En élevant au cube les 2 membres de l'égalité $x = \sqrt[3]{hx^2}$ on obtient

$x^3 = hx^2$ donc $h = \dfrac{x^3}{x^2} = \underline{x}$.

Ainsi l'aire de métal utilisé pour une casserole est minimale pour un rayon égal à la hauteur.