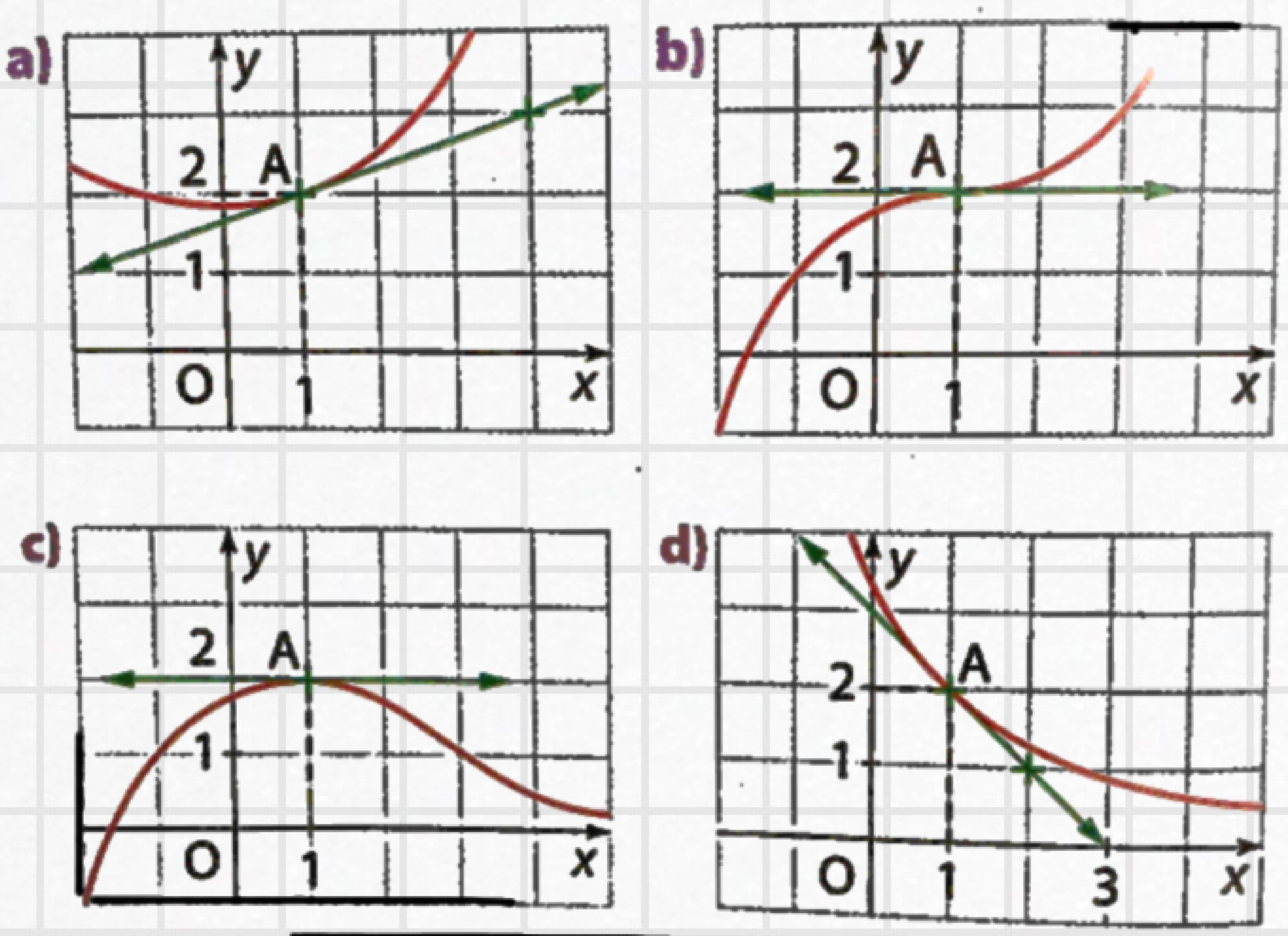
Nombre dérivé - Approche graphique et définition

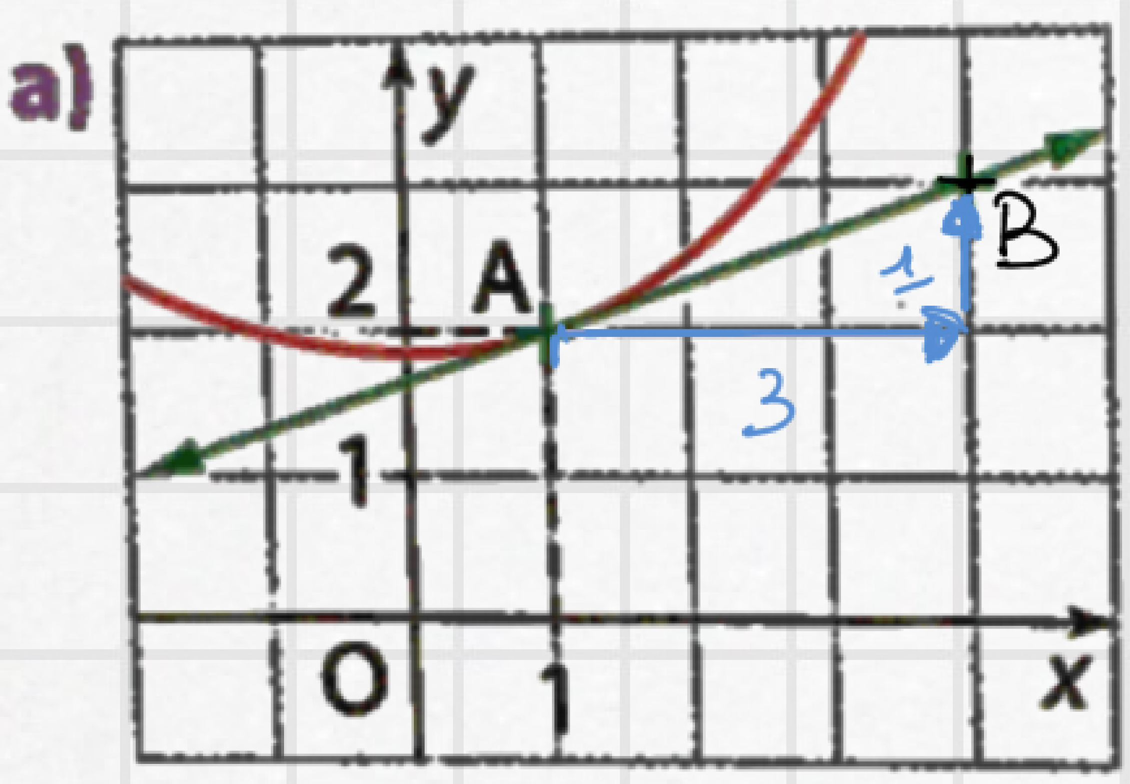
Approche graphique

1) Les fonctions suivantes sont dérivables en $x = 1$. Lire $f'(1)$.



Dans chacun des cas $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 1$. Puisque f est dérivable en $x = 1$, le nombre dérivé $f'(1)$ existe et est réel. Le coefficient directeur de la tangente est donc bien le nombre dérivé.

- Pour lire un coefficient directeur de droite, il suffit de chercher des points à coordonnées connues A et B. Le coefficient directeur de la droite s'obtient par la formule $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



A $(1 ; 2)$
B $(4 ; 3)$

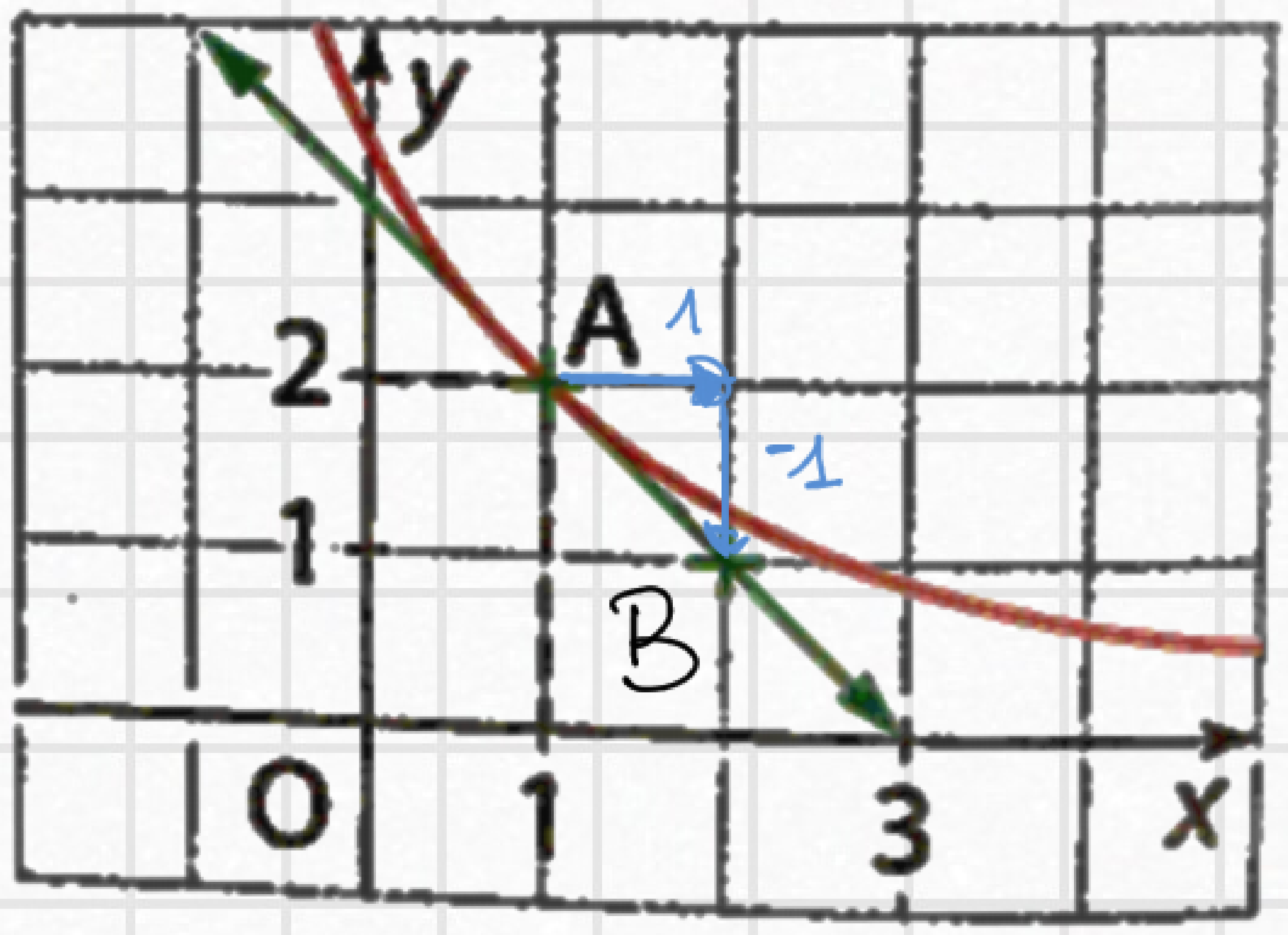
$f'(1) = \frac{3-2}{4-1}$

$f'(1) = \frac{1}{3}$

b et c) Dans les 2 cas les tangentes en A (qui a pour abscisse 1) sont horizontales, or le coefficient directeur d'une droite horizontale est 0 donc

$f'(1) = 0$

d)

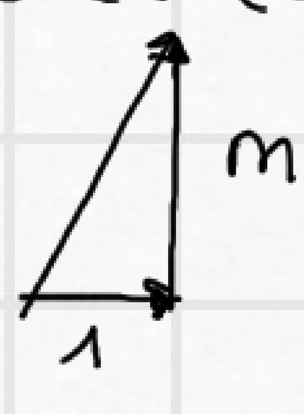


A $(1 ; 2)$ et B $(2 ; 1)$

donc $f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{2-1} = -1$

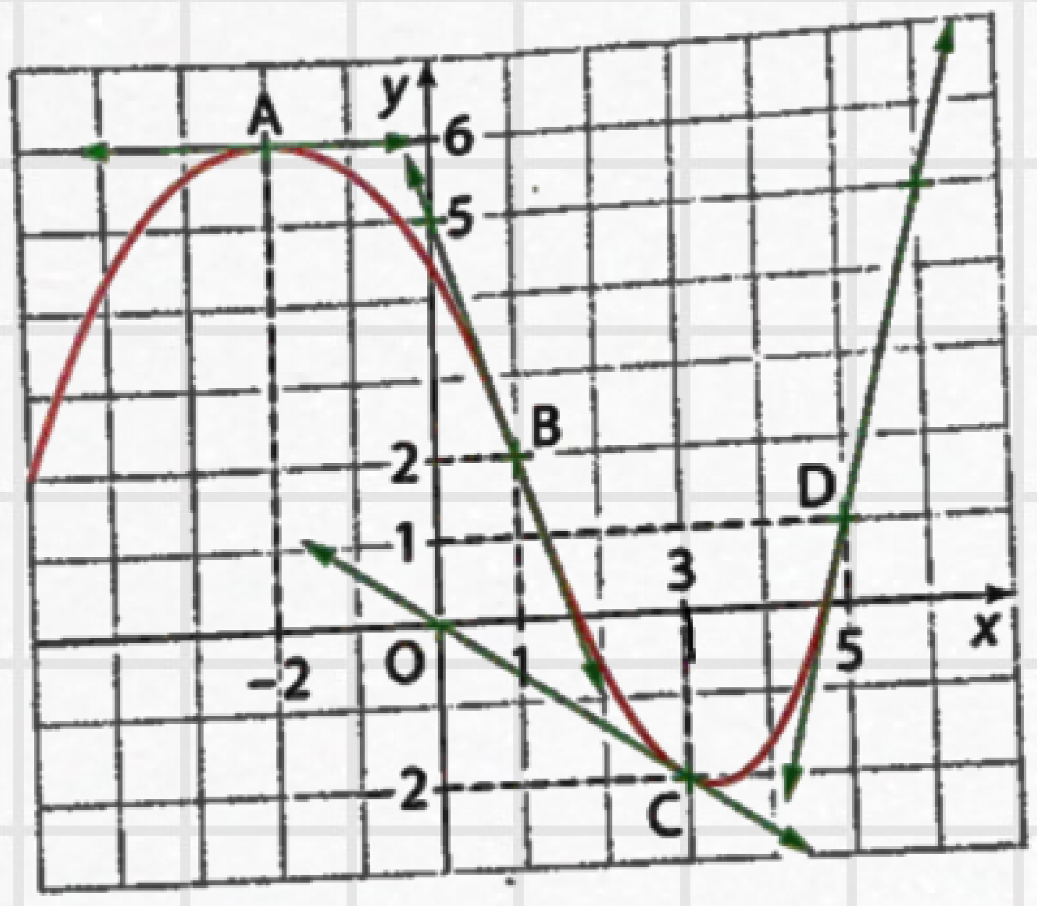
⚠ Bien prendre 2 points de la tangente et non pas de la courbe. L'un des 2 est généralement le point où la tangente à la courbe est représentée.

Remarque : Il est possible de déterminer le coefficient directeur "m" d'une droite avec la méthode de l'escalier

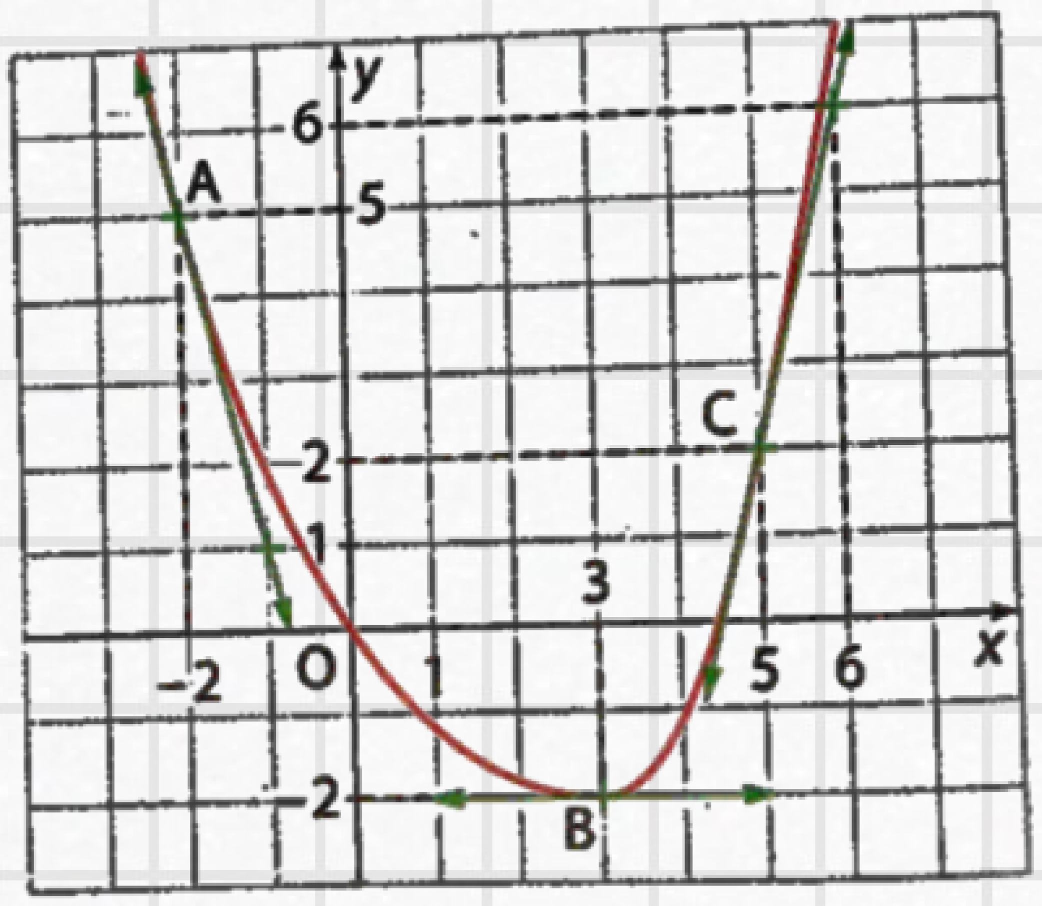


2) Déterminer les nombres dérivés sur les figures suivantes aux abscisses des points nommés sur la figure.

a)



b)

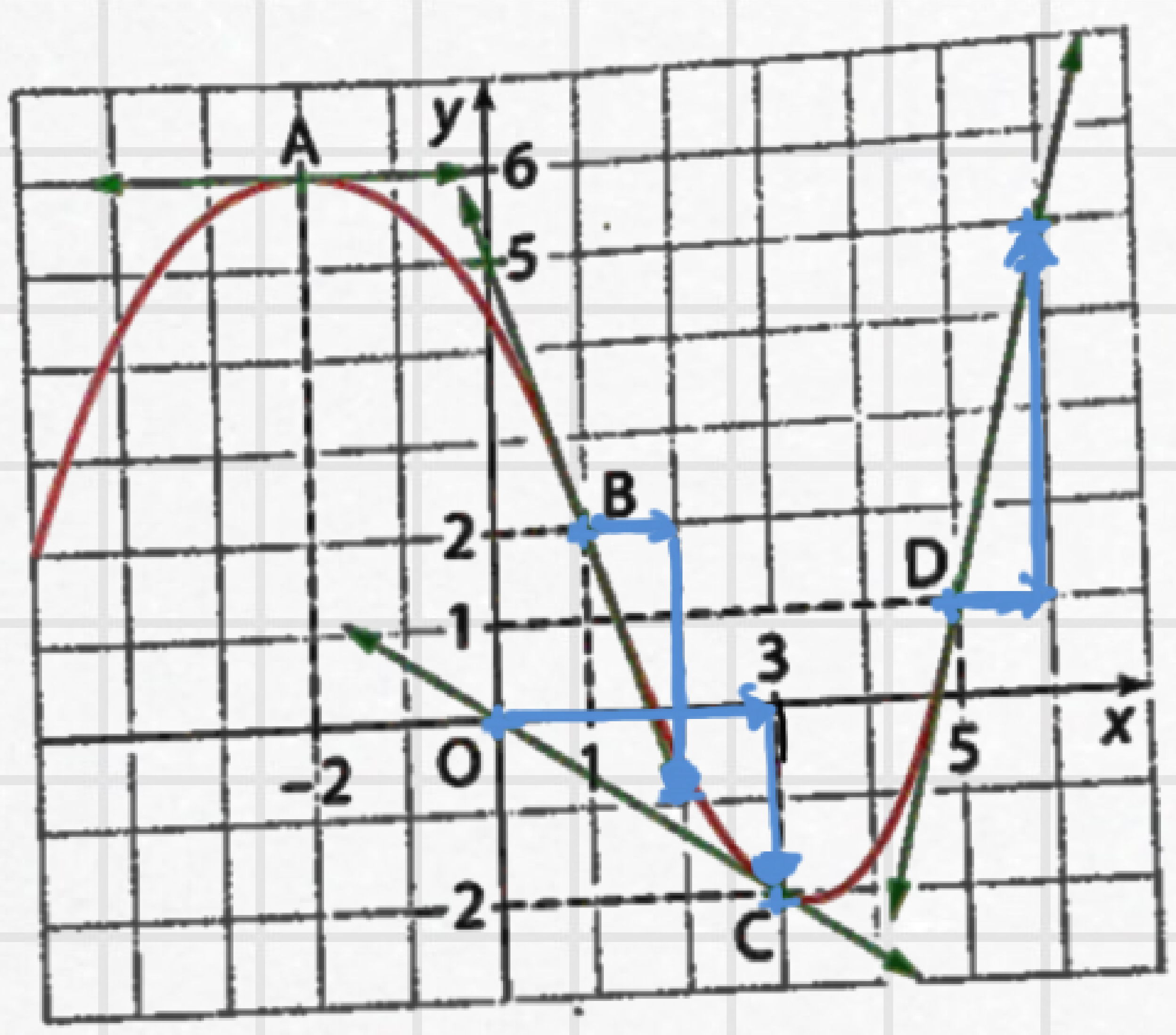


a) en A, $x_A = -2$ et $f'(-2) = 0$ car la tangente à la courbe est horizontale.

en B, $x_B = 1$ et $f'(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{1} = -3$

en C, $x_C = 3$ et $f'(3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

en D, $x_D = 5$ et $f'(5) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{1} = 4$



b) en A ; $x_A = -2$ et

$f'(-2) = \frac{-4}{1} = -4$

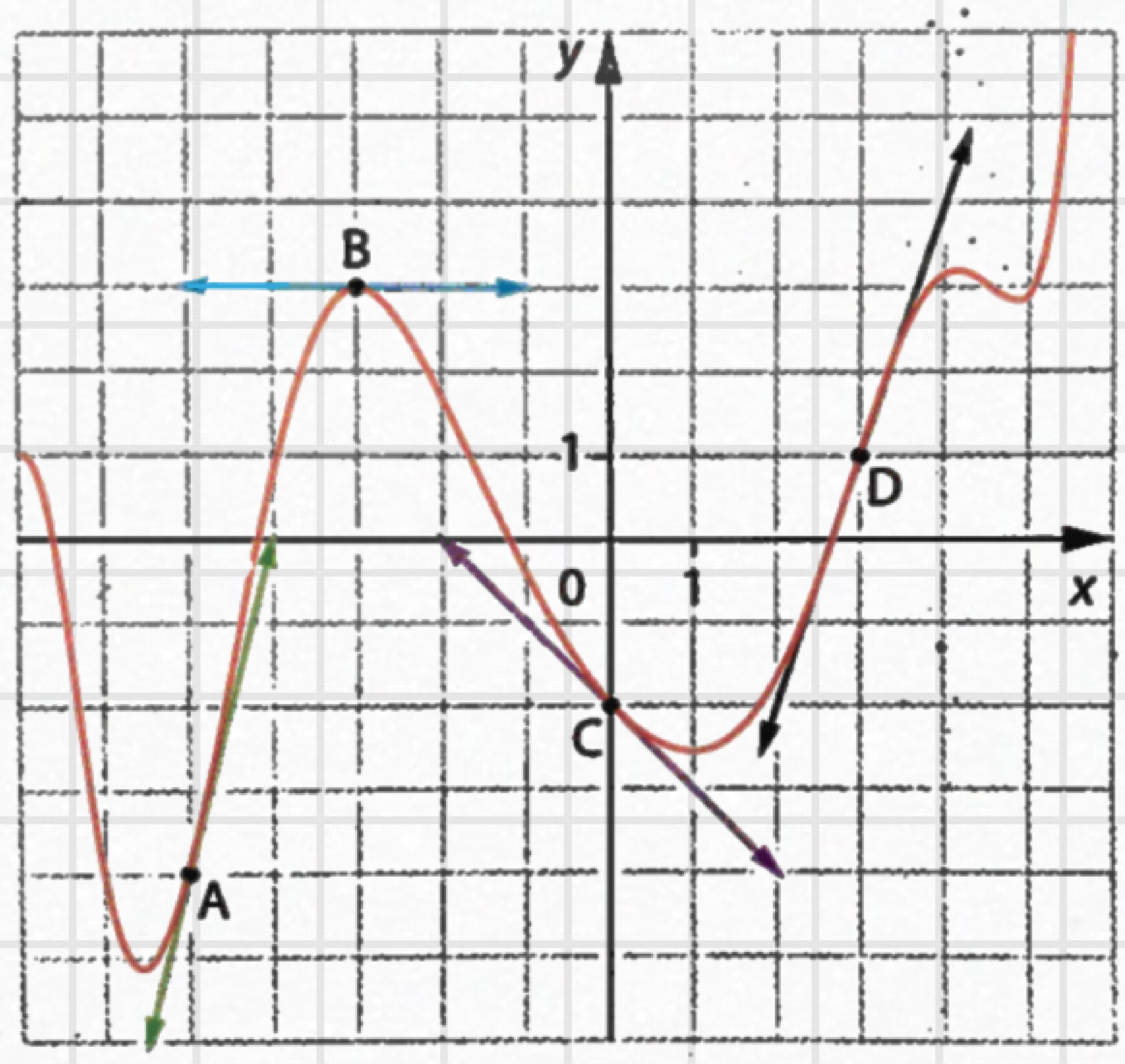
en B ; $x_B = 3$ et

$f'(3) = 0$

en C ; $x_C = 5$ et

$f'(5) = \frac{4}{1} = 4$

3) Même énoncé que exercice 2)



en A, $x_A = -5$

et $f'(-5) = \frac{4}{1} = 4$

en B, $x_B = -3$ et $f'(-3) = 0$

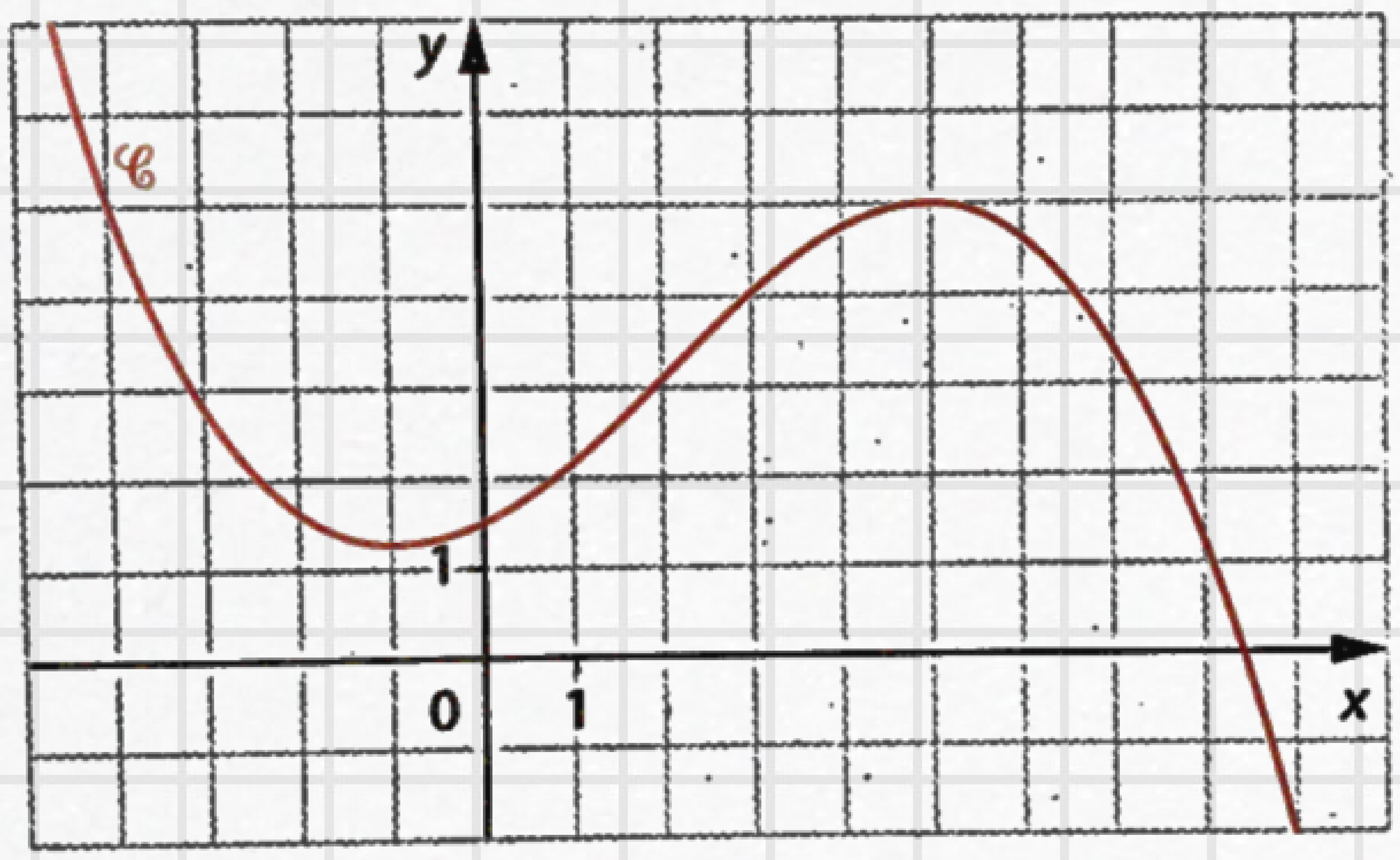
en C, $x_C = 0$ et $f'(0) = \frac{-1}{1} = -1$

en D, $x_D = 3$ et $f'(3) = \frac{3}{1} = 3$

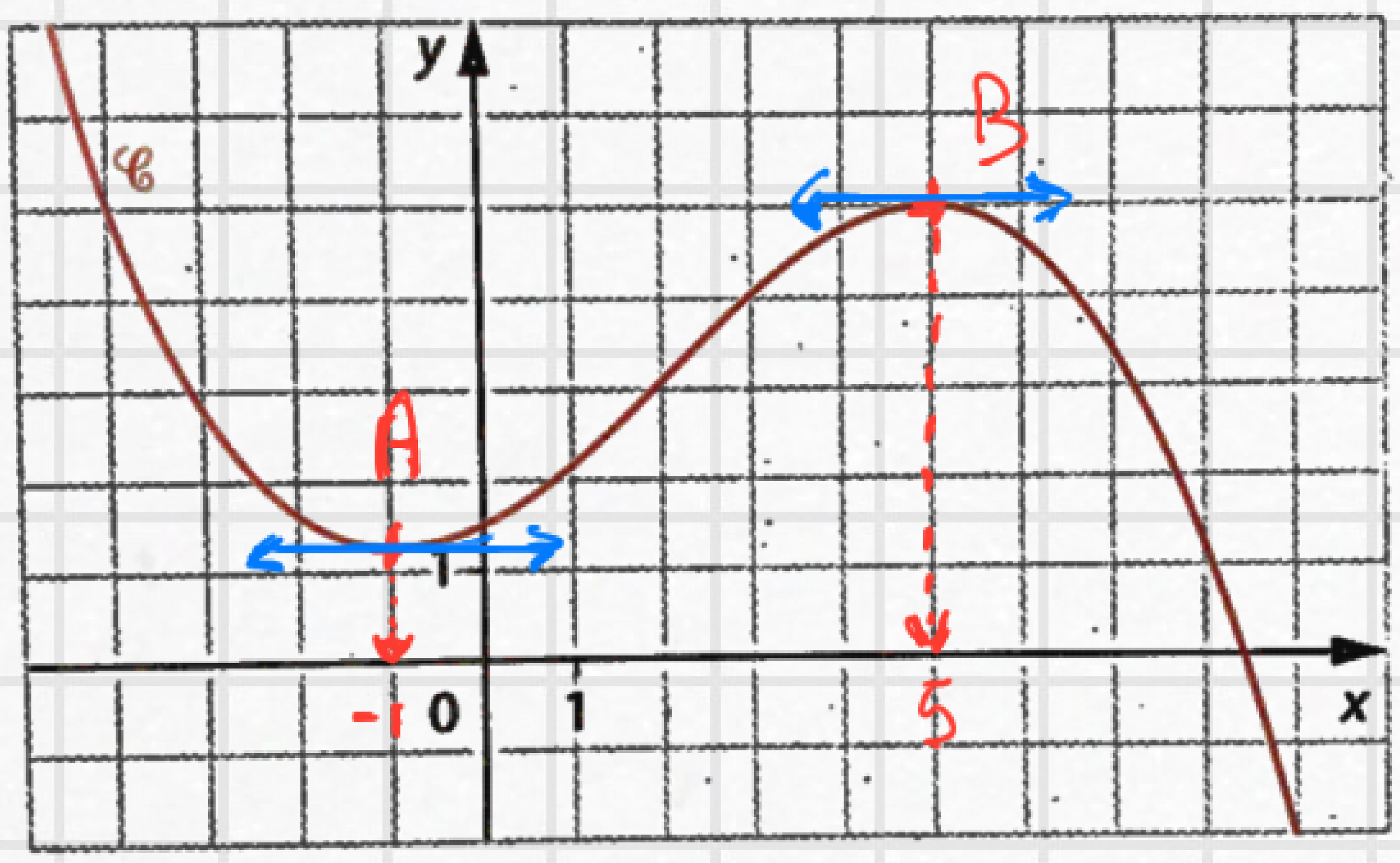
4) $\mathcal{C}$ représente une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Lire graphiquement les valeurs de a telles que $f'(a) = 0$

b) Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$, l'inéquation $f'(x) \geq 0$.

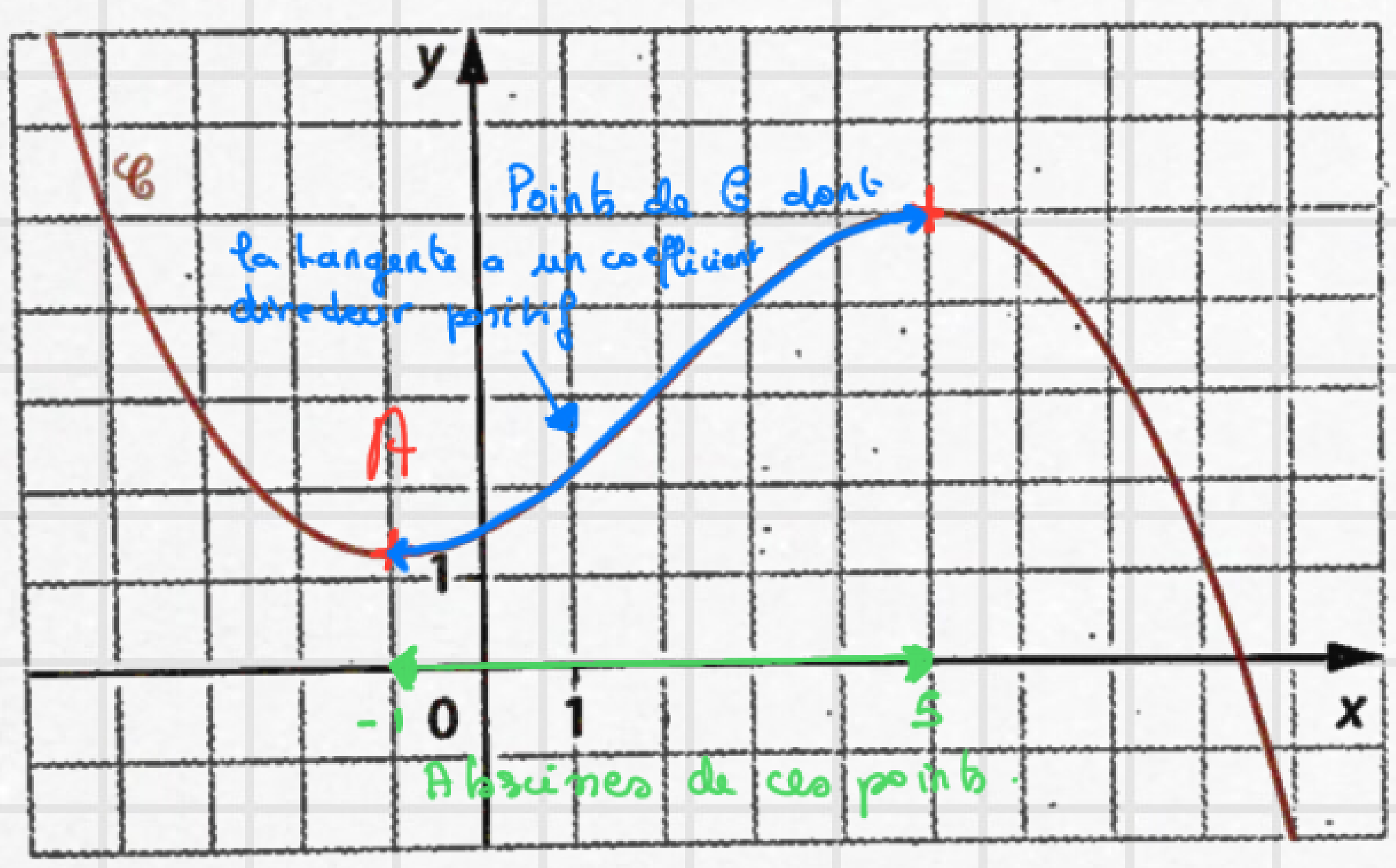


a) Il suffit de lire les abscisses des points de $\mathcal{C}$ où la tangente est horizontale. Il y en a deux. Nommons les A et B. $x_A = -1$ et $x_B = 5$ donc $f'(-1) = f'(5) = 0$.



b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ revient à déterminer les abscisses des points de la courbe par lesquels la tangente possède un coefficient directeur positif. Ces points se situent entre A et B et leurs abscisses appartiennent à l'intervalle $[-1;5]$

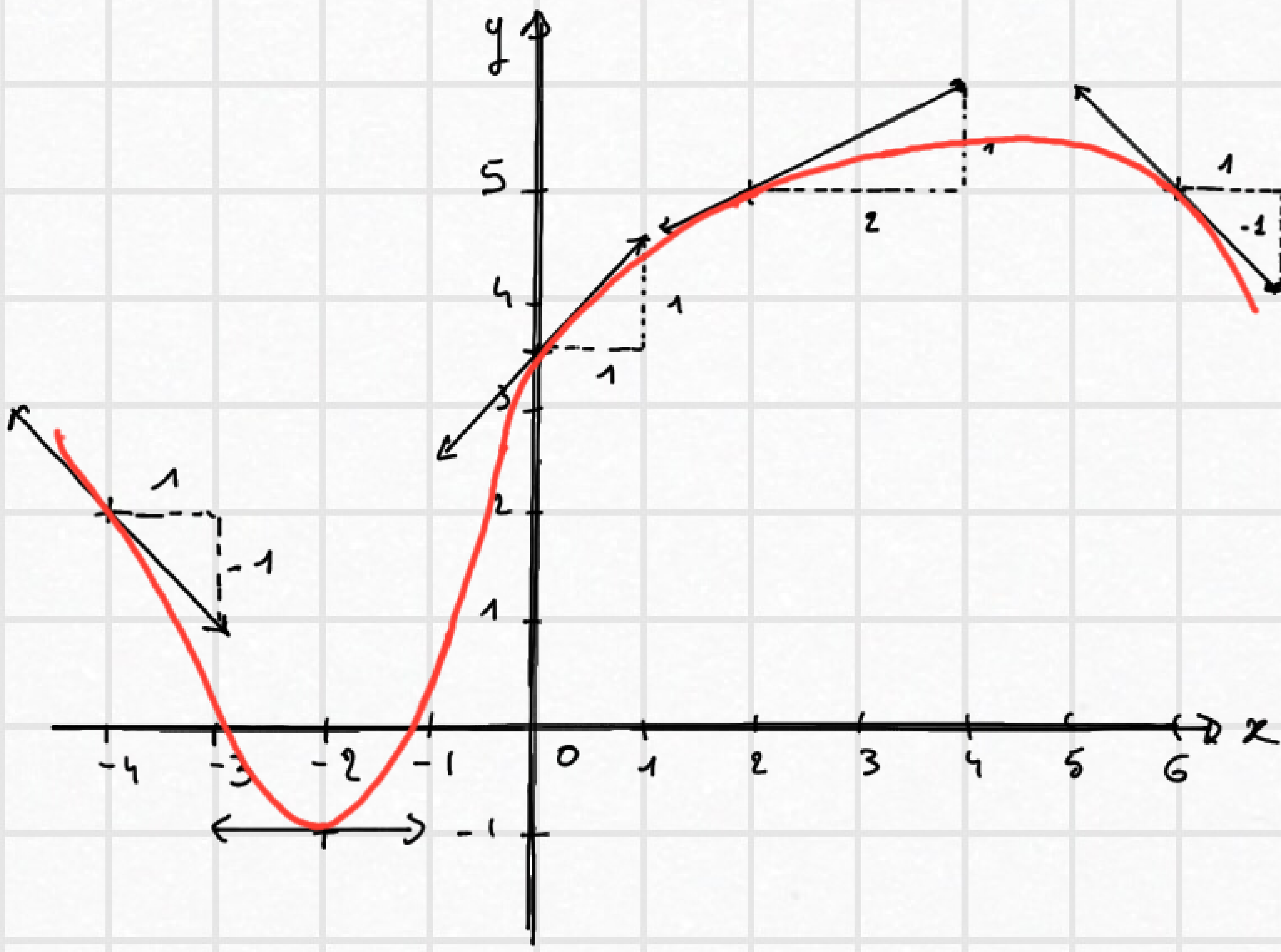
donc $f'(x) \geqslant 0 \iff -1 \leqslant x \leqslant 5$
(ou $x \in [-1;5]$)



5) On considère le tableau de valeurs suivants :

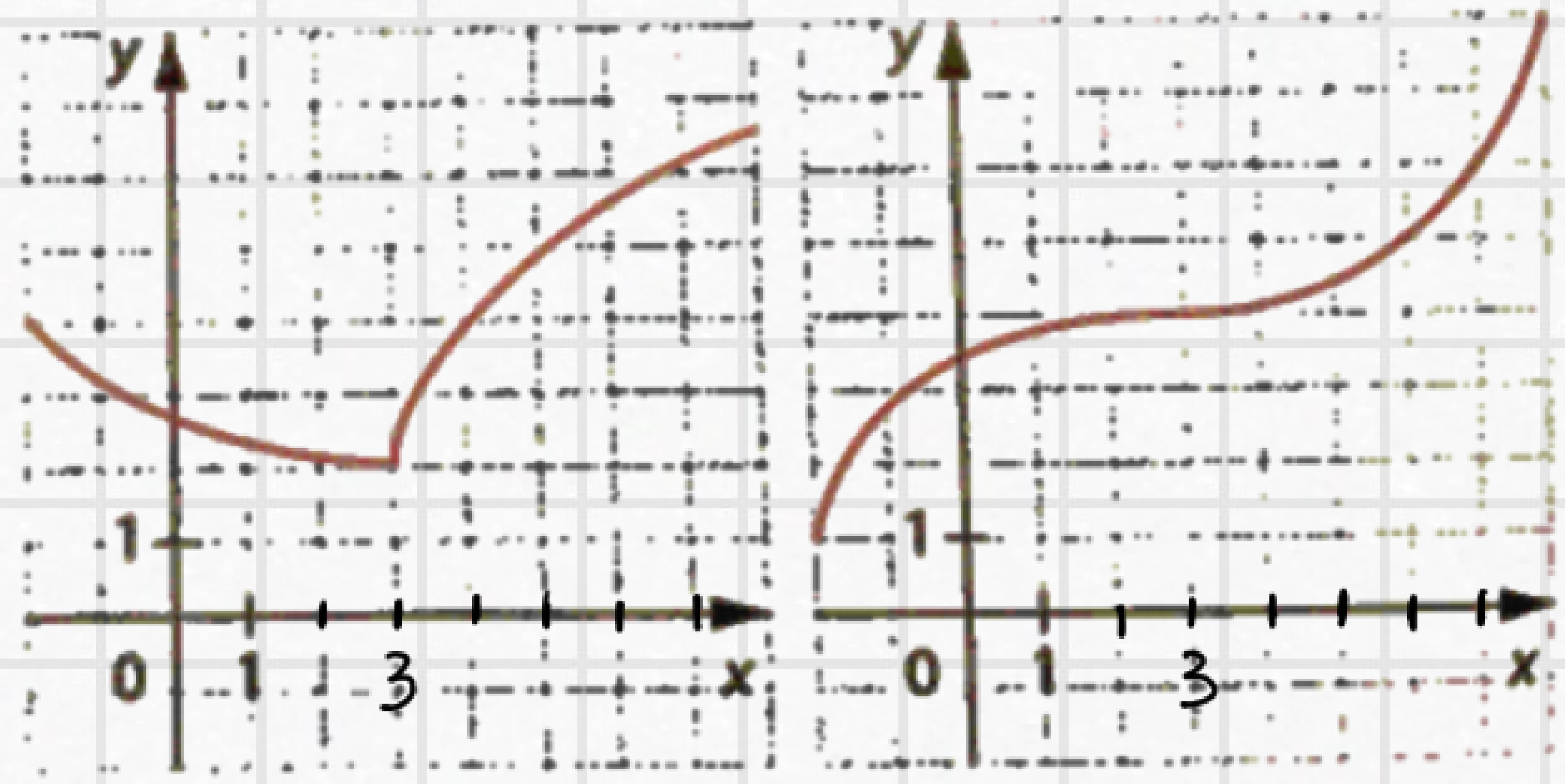
a	-4	-2	0	2	6
$f(a)$	2	-1	3,5	5	5
$f'(a)$	-1	0	1	0,5	-1

Placer les points de la courbe $\mathcal{C}$ de f ainsi connue, puis les tangentes en ces points, puis donner une allure possible de la courbe $\mathcal{C}$.

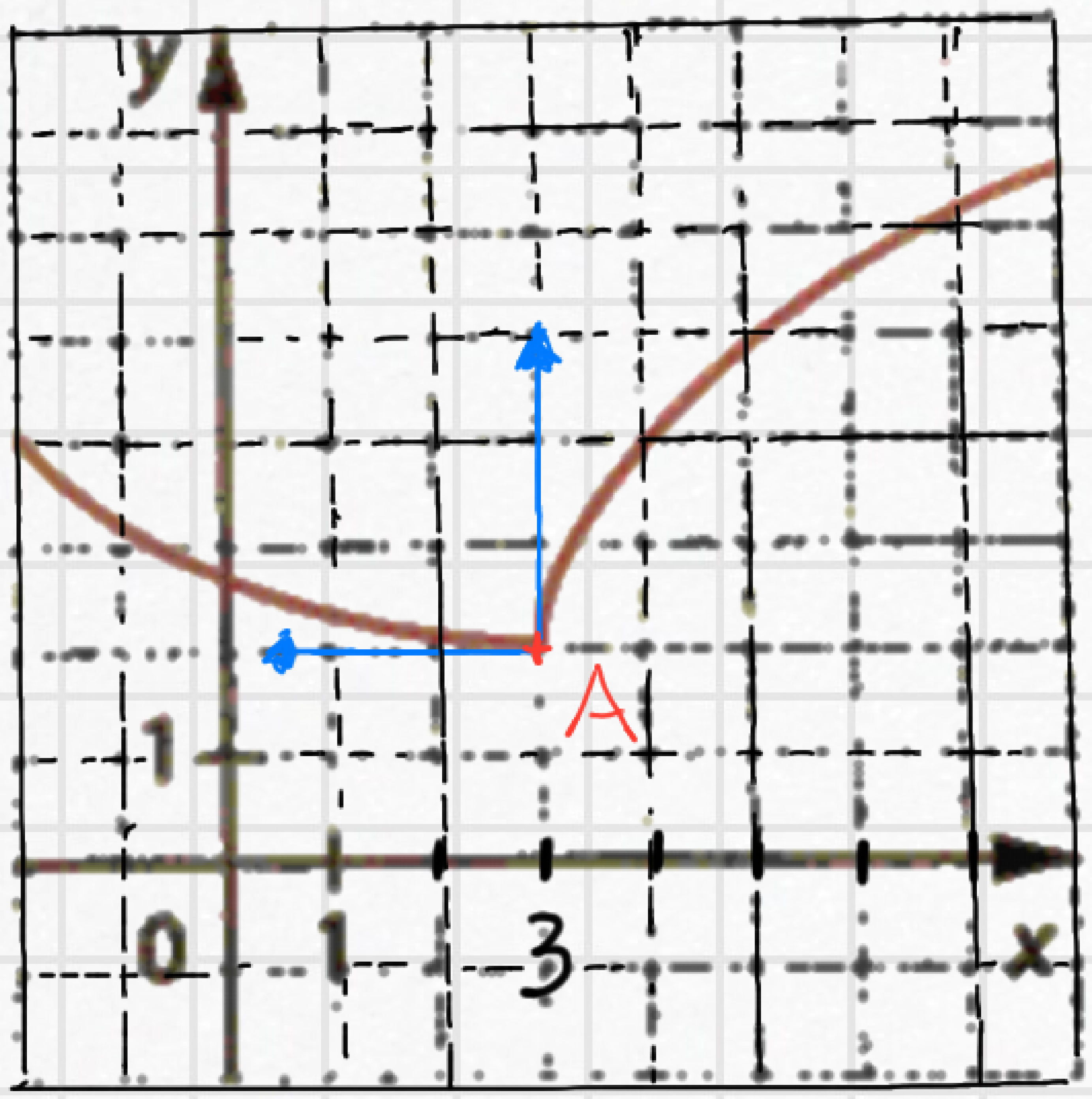


Rappel : La tangente à une courbe en un point est la meilleure approximation de la courbe par une droite en ce point.

5) Par lecture graphique, indiquer si les fonctions représentées ci-dessous sont dérivables en 3.

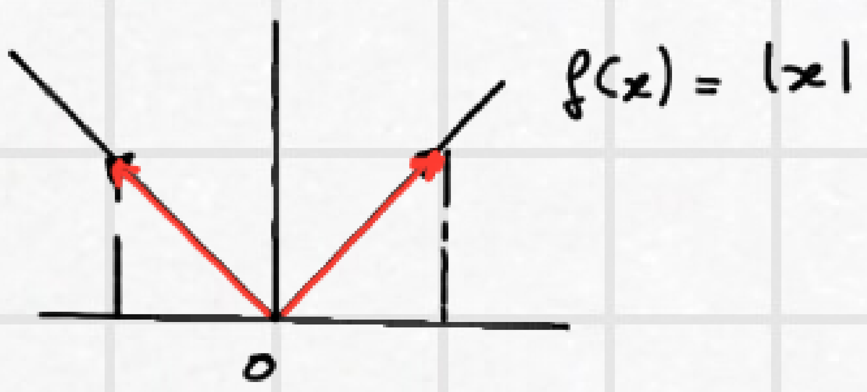


Sur le premier graphique la fonction n'est pas dérivable en 3 car la courbe possède deux demi-tangentes distinctes au point A.

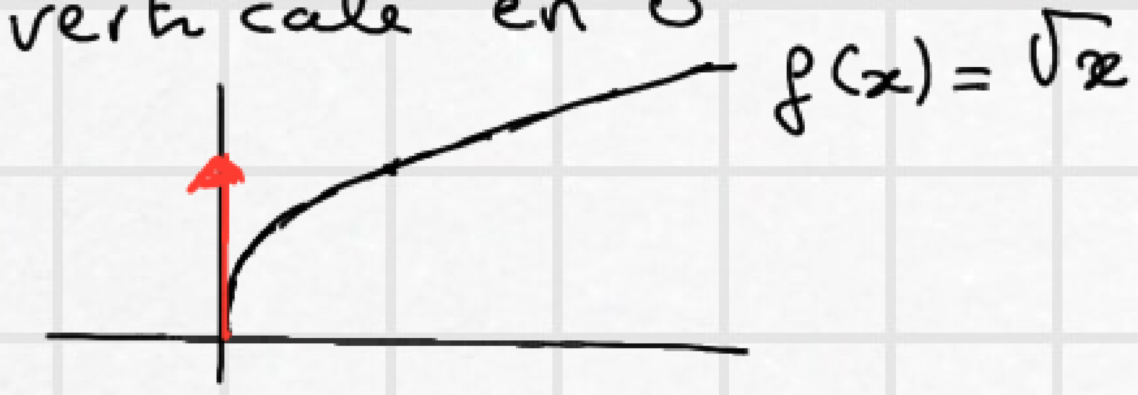


De plus la $\frac{1}{2}$ tangente "à droite" en A est verticale ce qui est un élément de plus de non dérivabilité de f en 3.

Rappel : $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 à cause du "point anguleux" en 0



Et $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 car sa courbe possède une demi-tangente verticale en 0



Définition avec le taux d'accroissement

Rappel : une fonction f est dérivable en $a \in I$ ssi pour $a \in I$, $a+h \in I$ et $h \neq 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, ℓ est le nombre dérivé de f en a : $\ell = f'(a)$.

---

6) Calculer $f'(a)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ $\quad a = 2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ $\quad a = 1$

c) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ $\quad a = 1$

d) $f(x) = x\sqrt{x}$ avec $a > 0$

La fonction est-elle dérivable en 0 ?

---

a) $f(2+h) = 2(2+h)^2 - 3(2+h) + 4$

$= 2(4 + 4h + h^2) - 6 - 3h + 4$

$= 8 + 8h + 2h^2 - 6 - 3h + 4$

$= 2h^2 + 5h + 6$

$f(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 4 = 8 - 6 + 4 = 6$

Pour tout $h \neq 0$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{2h^2 + 5h + 6 - 6}{h} = \frac{2h^2 + 5h}{h}$$

$$= \frac{h(2h+5)}{h} = 2h + 5$$

et $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (2h + 5) = 5 \in \mathbb{R}$

$f'(2) = 5.$

b) $f(1+h) = \dfrac{1}{2(1+h) - 1} = \dfrac{1}{2h+1}$

$f(1) = \dfrac{1}{2 \times 1 - 1} = 1$

Pour $h \neq 0$, $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\frac{1}{2h+1} - 1}{h}$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{2h+1} - \frac{(2h+1)}{2h+1}}{h}$$

$$= \frac{\frac{1-2h-1}{2h+1}}{h} = \frac{\frac{-2h}{1+2h}}{h} = \frac{-2h}{1+2h} \times \frac{h}{1}$$

$$= \frac{-2}{1+2h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2}{1+2h} = -2$$

$-2 \in \mathbb{R}$, donc $\underline{f'(1) = -2}$.

c) $f(1+h) = \sqrt{3(1+h)+1} = \sqrt{3h+4}$

$f(1) = \sqrt{4} = 2$

Pour $h \neq 0$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{3h+4} - 2}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{3h+4}-2)(\sqrt{3h+4}+2)}{h(\sqrt{3h+4}+2)}$$

$$= \frac{3h+4-4}{h(\sqrt{3h+4}+2)} = \frac{3h}{h(\sqrt{3h+4}+2)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3h+4}+2}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3}{\sqrt{3h+4}+2}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{4}+2} = \frac{3}{4}$$

d) $f(a+h) = (a+h)\sqrt{a+h}$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)\sqrt{a+h} - a\sqrt{a}}{h}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)\sqrt{a+h} - a\sqrt{a}}{h}$$

$$= \frac{((a+h)\sqrt{a+h} - a\sqrt{a})((a+h)\sqrt{a+h} + a\sqrt{a})}{h}$$

$$= \frac{(a+h)^2(a+h) - a^2 a}{h((a+h)\sqrt{a+h} + a\sqrt{a})}$$

$$= \frac{(a+h)^3 - a^3}{h((a+h)\sqrt{a+h}+a\sqrt{a})} = \frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3-a^3}{h((a+h)\sqrt{a+h}+a\sqrt{a})}$$

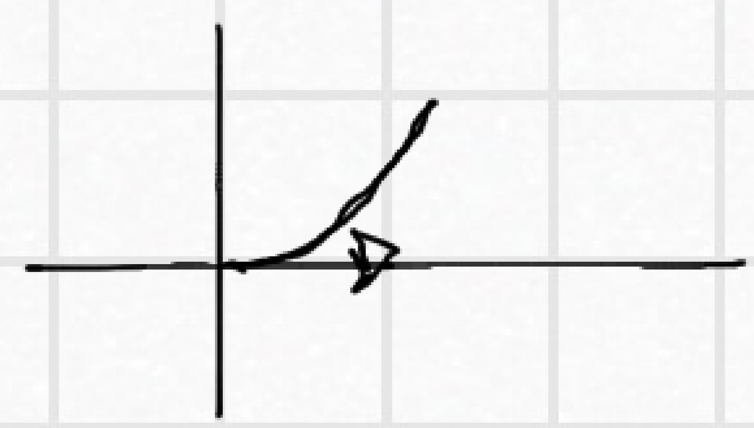
$$= \frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h((a+h)\sqrt{a+h}+a\sqrt{a})} = \frac{3a^2+3ah+h^2}{(a+h)\sqrt{a+h}+a\sqrt{a}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h((a+h)\sqrt{a+h}+a\sqrt{a})} = \frac{3a^2}{a\sqrt{a}+a\sqrt{a}} = \frac{3a^2}{2a\sqrt{a}} = \frac{3}{2}a\sqrt{a}$$

pour tout $a > 0$ $f'(a) = \frac{3}{2}a\sqrt{a}$

et si $a = 0$ $f'(0) = 0$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. La courbe représentative de f admet une demi-tangente horizontale en 0.



7) Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur I.

a) $f(x) = x^2 - 4$ sur $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ sur $]2;+\infty[$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

a) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-4-(a^2-4)}{h} = \frac{2ah+h^2}{h}$$

$= 2a + h$ et $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a \in \mathbb{R}$

donc pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 2a \in \mathbb{R}$.

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $a > 2$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h > 2$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h-2} - \frac{1}{a-2}}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{a+h-2} - \frac{1}{a-2}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{a-2-(a+h-2)}{(a+h-2)(a-2)}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{-h}{(a+h-2)(a-2)}\right)$$

$$= \frac{-1}{(a+h-2)(a-2)}$$

et $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{-1}{(a-2)^2} \in \mathbb{R}$

donc pour tout $a > 2$, $f'(a) = \dfrac{-1}{(a-2)^2} \in \mathbb{R}$,

ainsi f est dérivable sur $]2; +\infty[$.

c) pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(a+h)^2+1} - \frac{1}{a^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{a^2+1-(a+h)^2-1}{((a+h)^2+1)(a^2+1)}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{-2ah-h^2}{((a+h)^2+1)(a^2+1)}\right)$$

$$= \frac{h(-2a-h)}{h((a+h)^2+1)(a^2+1)} = \frac{-2a-h}{((a+h)^2+1)(a^2+1)}$$

a $\displaystyle\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))\right) = \frac{-2a}{(a^2+1)^2} \in \mathbb{R}$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = \dfrac{-2a}{(a^2+1)^2} \in \mathbb{R}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

8) Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas dérivables en a.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ avec $a = 0$

b) $g(x) = \sqrt{3-x}$ avec $a = 3$

a) f est définie sur $[0; +\infty[$.

$a \geq 0$ et $a + h \geq 0$ et $h \neq 0$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$

ainsi $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{a}} = f'(a)$

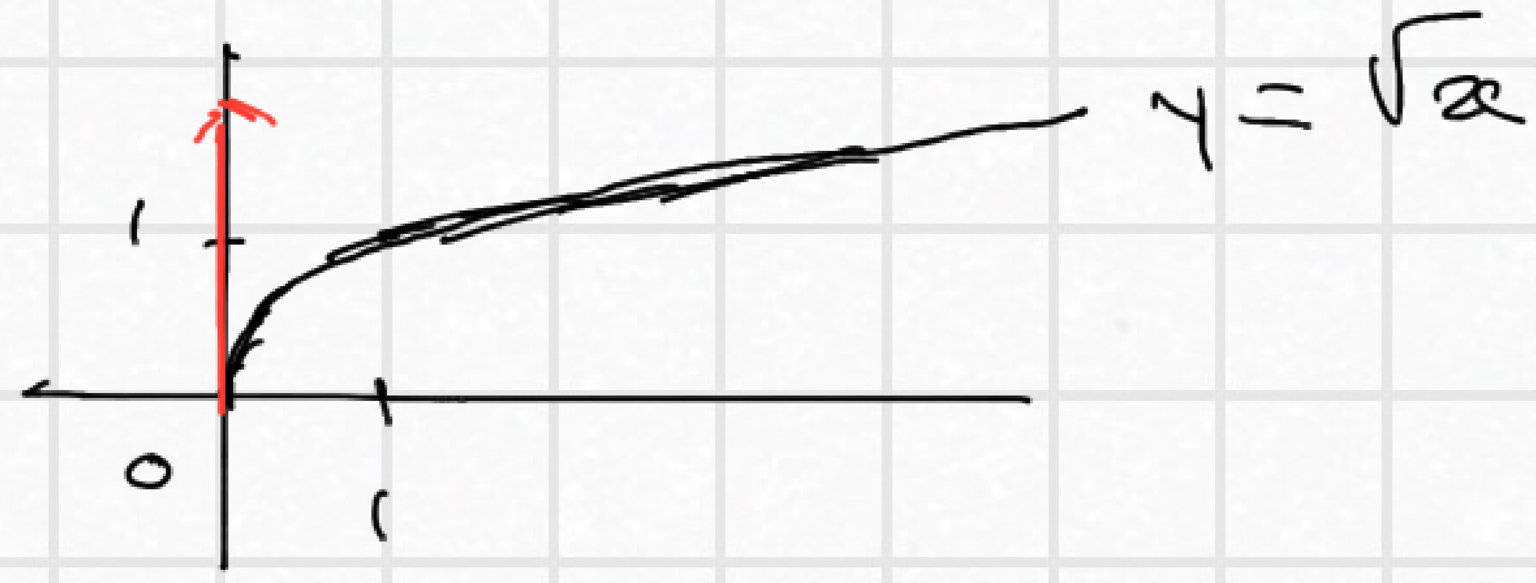
pour tout $a \neq 0$

et pour $a = 0$, $f'(a)$ n'est pas définie

donc f n'est pas dérivable en $a = 0$.

De plus $\displaystyle\lim_{a \to 0^+} f'(a) = \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{a}} = +\infty$

donc la courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une $\frac{1}{2}$ tangente verticale en 0.



b) La fonction f est définie sur $]-\infty; 3[$. $a \leq 3$, $a+h \leq 3$ et $h \neq 0$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{3-(a+h)} - \sqrt{3-a}}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{3-(a+h)} - \sqrt{3-a})(\sqrt{3-(a+h)} + \sqrt{3-a})}{h(\sqrt{3-(a+h)} + \sqrt{3-a})}$$

$$= \frac{3-(a+h)-(3-a)}{h(\sqrt{3-(a+h)} + \sqrt{3-a})} = \frac{-1}{\sqrt{3-(a+h)} + \sqrt{3-a}}$$

ainsi $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{-1}{2\sqrt{3-a}}$

Pour tout $a < 3$,

$f'(a) = \frac{-1}{2\sqrt{3-a}}$ et f est

dérivable en a et pour $a = 3$

f n'est pas dérivable.

($f'(3)$ n'est pas défini.)