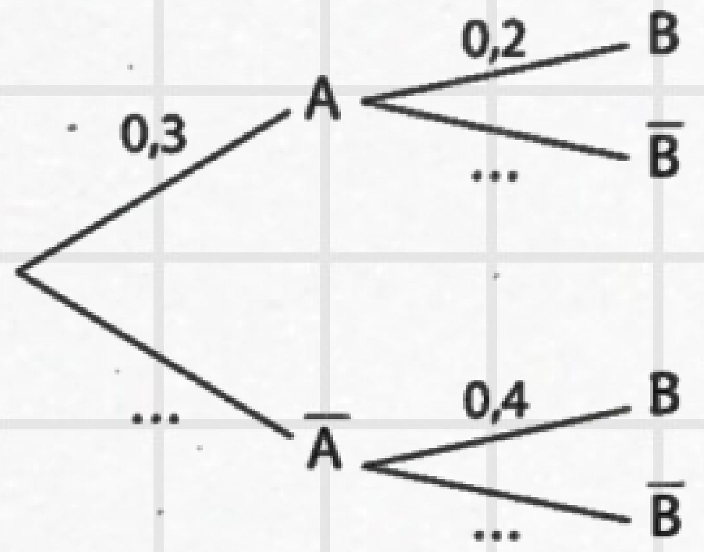
① Exercices corrigés Probabilités conditionnelles

L'arbre ci-dessous modélise une situation où A et B sont deux événements.



1. Lisez les valeurs de $p_A(B)$ et de $p_{\overline{A}}(B)$.

2. Complétez cet arbre et déduisez-en les valeurs de :

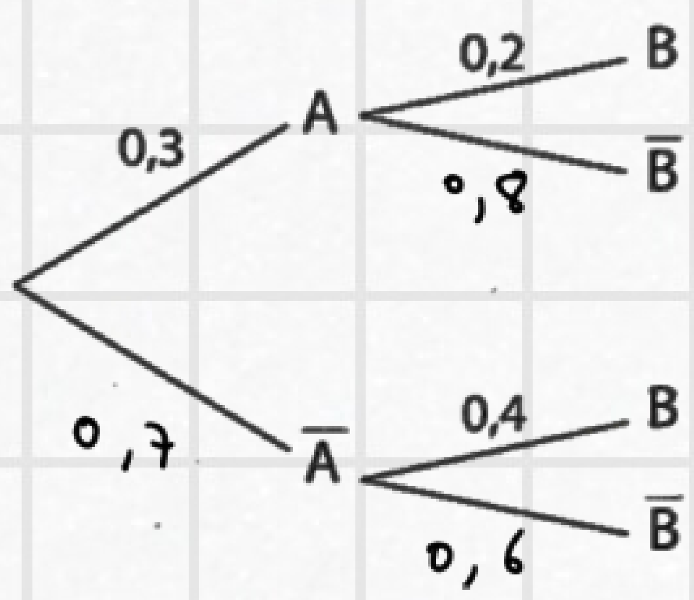
a) $p(A \cap B)$ **b)** $p(A \cap \overline{B})$ **c)** $p(\overline{A} \cap B)$ **d)** $p(\overline{A} \cap \overline{B})$.

3. Vérifiez que la somme des quatre nombres précédents est égale à 1.

---

1) $p_A(B) = 0,2$ et $p_{\overline{A}}(B) = 0,4$

2)



$p(A \cap B) = 0,3 \times 0,2$

$p(A \cap \overline{B}) = 0,3 \times 0,8$

$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$

$p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p_A(\overline{B}) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$

$p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$

$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$

3) $0,06 + 0,24 + 0,28 + 0,42 = 0,3 + 0,7 = 1$

---

②

Résultats du bac

Dans l'ensemble des classes de terminale générale, en 2010, il y avait 45 % de garçons. 88 % des filles ont été reçues au bac et seulement 86 % des garçons.

(Source : ministère de l'Education nationale/DEPP).

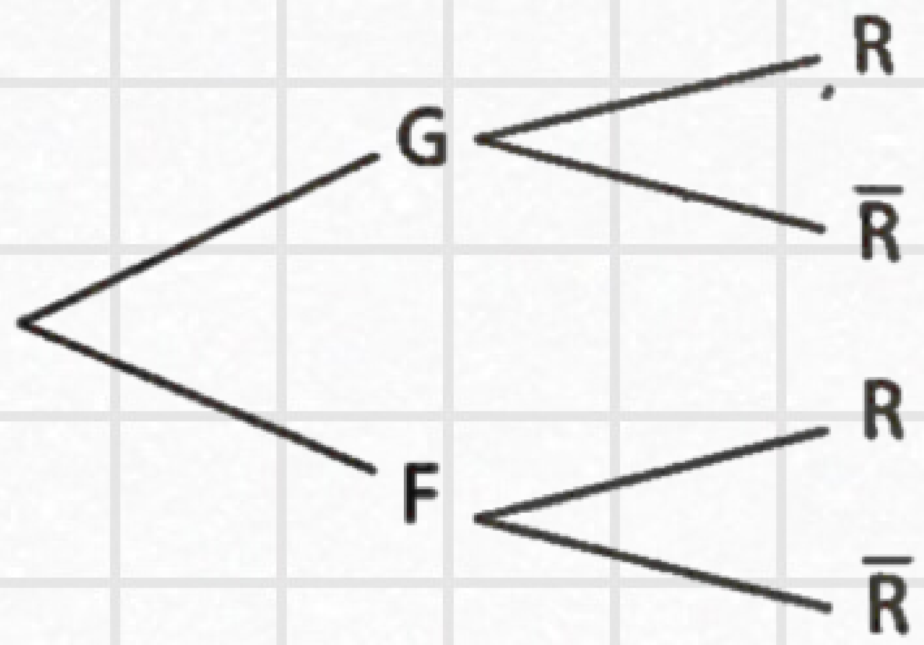
On rencontre au hasard un élève qui était en terminale cette année-là.

On note :

- G l'événement : « l'élève rencontré est un garçon ».
- F l'événement : « l'élève rencontré est une fille ».
- R l'événement : « l'élève rencontré a été reçu au bac ».

1. En utilisant les notations ci-dessus, traduisez en langage des probabilités la phrase : « 88 % des filles ont été reçues au bac ».

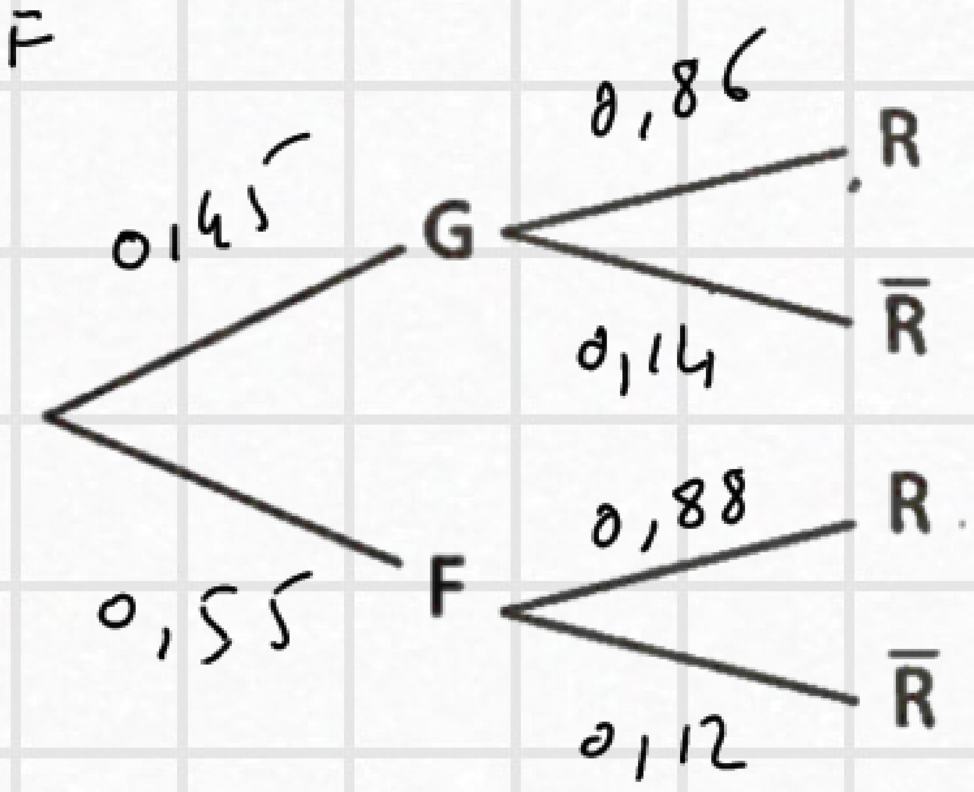
2. Recopiez et complétez l'arbre ci-dessous permettant de modéliser la situation :



---

1) $p_F(R) = 0,88$

2)



---

③

Usages d'Internet

En vue de sa prochaine brochure d'information sur les dangers d'Internet, un lycée a fait remplir un questionnaire à chacun des 2000 élèves, répartis dans les classes de seconde, première et terminale.

On obtient la répartition suivante :

- un quart des élèves est en terminale ;
- 35 % des élèves sont en première ;
- tous les autres sont en seconde ;
- parmi les élèves de terminale, 70 % utilisent régulièrement Internet ;
- 630 élèves sont des élèves de première qui utilisent régulièrement Internet ;
- 1 740 élèves utilisent régulièrement Internet.

On choisit au hasard un questionnaire d'élève, en supposant que ce choix se fait en situation d'équiprobabilité. On note :

- S l'événement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de seconde » ;
- E l'événement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de première » ;
- T l'événement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de terminale » ;
- I l'événement « le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement Internet ».

1. Complétez le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Seconde	Première	Terminale	Total
Utilise Internet régulièrement				
N'utilise pas Internet régulièrement				
Total				

2. Déterminez la probabilité d'obtenir le questionnaire d'un élève de seconde qui utilise régulièrement Internet.

3. Calculez la probabilité de I sachant T, notée $p_T(I)$, et interprétez ce résultat à l'aide d'une phrase.

4. Calculez la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un élève qui n'utilise pas Internet.

5. Le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement Internet. Montrez que la probabilité que ce soit le questionnaire d'un élève de première est égale à $\frac{21}{58}$.

---

1)

	Seconde	Première	Terminale	Total
Utilise Internet régulièrement	935	630	175	1740
N'utilise pas Internet régulièrement	115	70	75	260
Total	1050	700	250	2000

$\frac{1}{4} \times 2000 = 250$ élèves en terminale

$2000 \times 0,35 = 700$ élèves en première

Le reste est en seconde : $2000 - 700 - 250 = 1050$

$0,7 \times 250 = 175$ terminales utilisant Internet donc 75 ne l'utilisent pas.

$1740 - 630 - 175 = 935$ secondes utilisant Internet.

2) $p(S \cap I) = \frac{935}{200} = 0,4675$

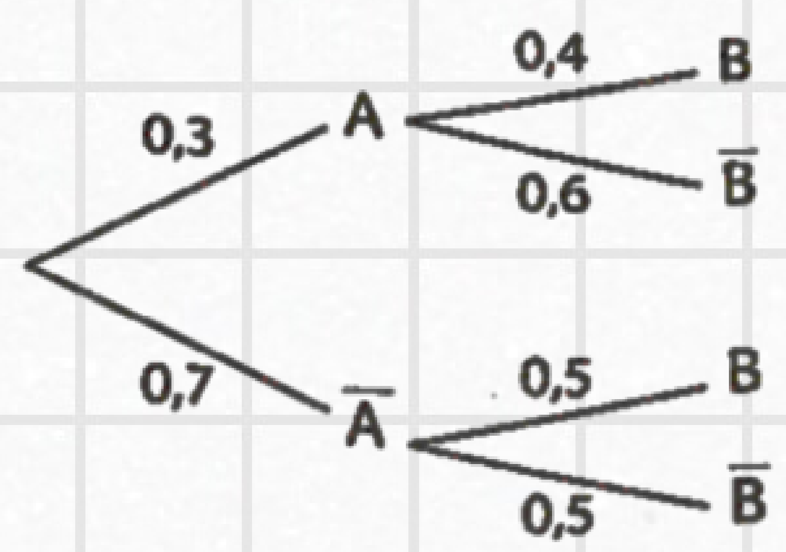
3) $p_T(I) = \frac{175}{250} = 0,875$

4) $p(\bar{I}) = \frac{260}{2000} = 0,13$

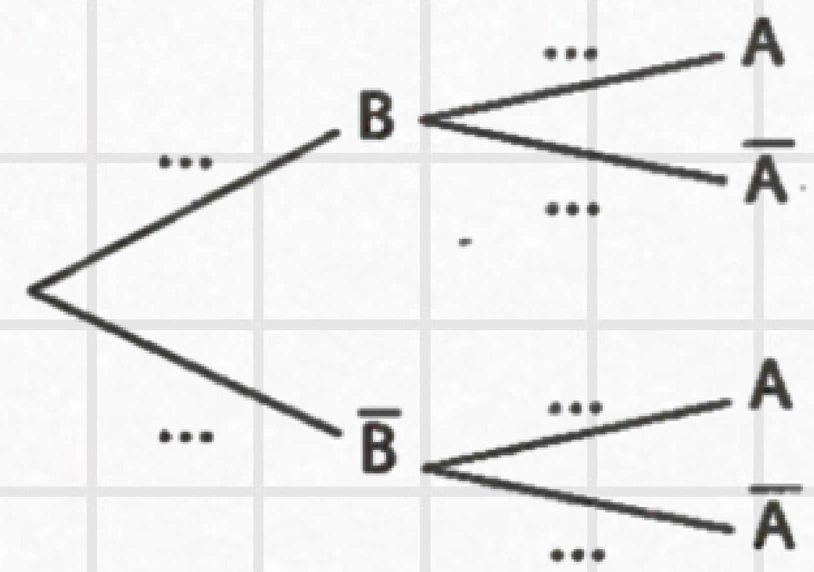
5) $p_I(E) = \frac{630}{1740} = \frac{21}{58}$

4

Une situation est modélisée par l'arbre ci-dessous, A et B désignant deux événements.



On se propose de déterminer les probabilités inscrites sur chacune des branches de l'arbre ci-dessous :



Cet arbre, commençant par les événements B et $\bar{B}$, est appelé l'arbre inversé du précédent.

1. a) En utilisant l'arbre initial, calculez $p(A \cap B)$ et $p(\bar{A} \cap B)$.

b) Déduisez-en $p(B)$.

2. On souhaite à présent obtenir $p_B(A)$.
En écrivant $p(A \cap B)$ de deux manières, calculez $p_B(A)$.

3. Calculez de même $p_{\bar{B}}(A)$.

4. Recopiez l'arbre inversé et complétez les probabilités manquantes.

1a)

$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$

$p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) = 0,7 \times 0,5 = 0,35$

1b) A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers et en utilisant la formule des probabilités totales

$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = 0,12 + 0,35 = 0,47$

2) $p(A \cap B) = 0,12$

et $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$

ainsi $p(B) \times p_B(A) = 0,12$

et donc $p_B(A) = \dfrac{0,12}{p(B)} = \dfrac{0,12}{0,47} \simeq 0,255$

$p(A \cap \bar{B}) = p_{\bar{B}}(A) \times p(\bar{B})$

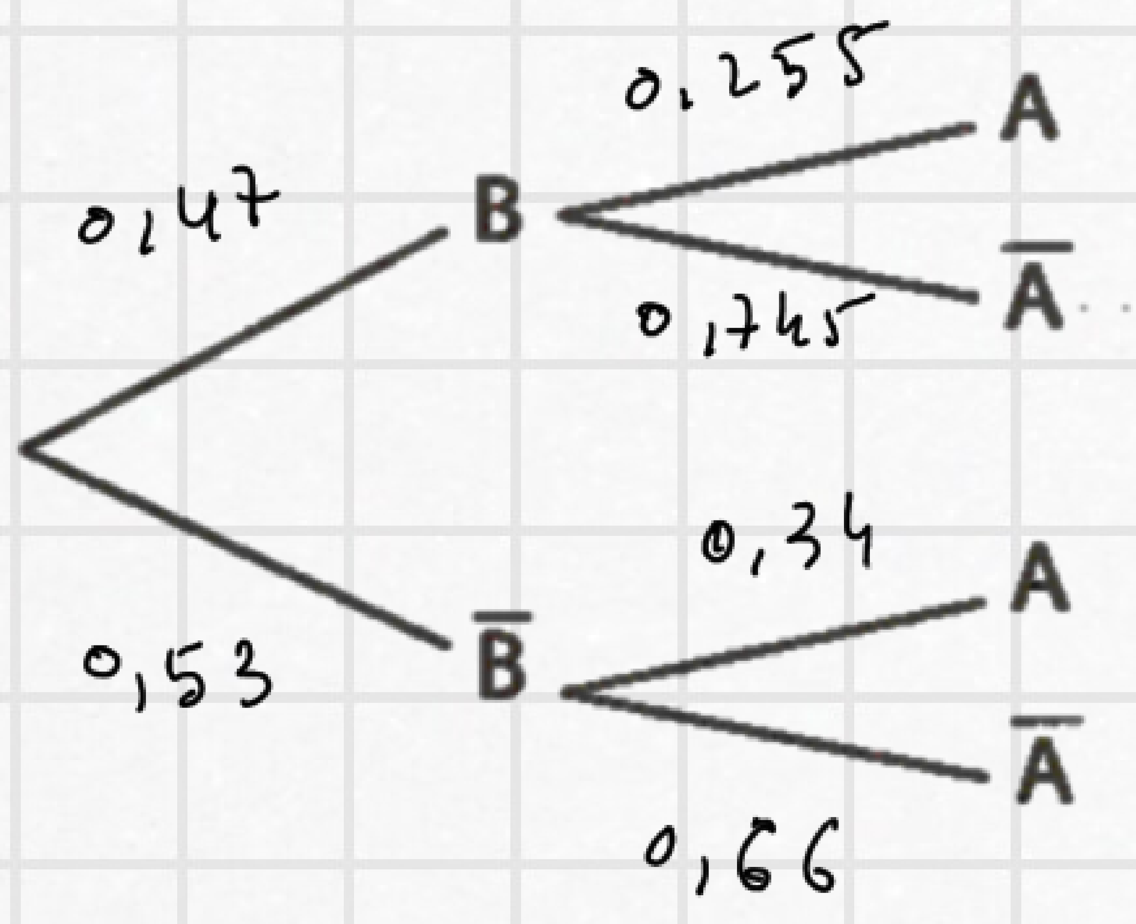
donc $p_{\bar{B}}(A) = \dfrac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})}$

or $p(A \cap \bar{B}) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$

et $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0,47 = 0,53$

$p_{\bar{B}}(A) = \dfrac{0,18}{0,53} \simeq 0,34$

4)



5

Bonne ou mauvaise surprise

Lors de l'année de terminale , les trois quarts des élèves travaillent sérieusement tout au long de l'année scolaire.

Un candidat au baccalauréat a une probabilité de 0,9 d'obtenir son bac s'il a travaillé sérieusement et une probabilité de 0,2 s'il n'a pas travaillé sérieusement pendant l'année scolaire.

Un candidat est dit surpris s'il est admis alors qu'il n'a pas travaillé sérieusement pendant l'année scolaire ou bien s'il est refusé et qu'il a travaillé sérieusement pendant l'année scolaire. On note :

- T l'événement « le candidat a travaillé sérieusement » ;
- A l'événement « le candidat est admis au baccalauréat .
- S l'événement « le candidat est surpris ».

On interroge au hasard un candidat au baccalauréat .

Dans tout l'exercice, on donnera des valeurs approchées arrondies au millième.

1. Construisez un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé.

2. Déterminez la probabilité des événements suivants :

a) $T \cap A$;

b) $T \cap \bar{A}$;

c) $\bar{T} \cap A$;

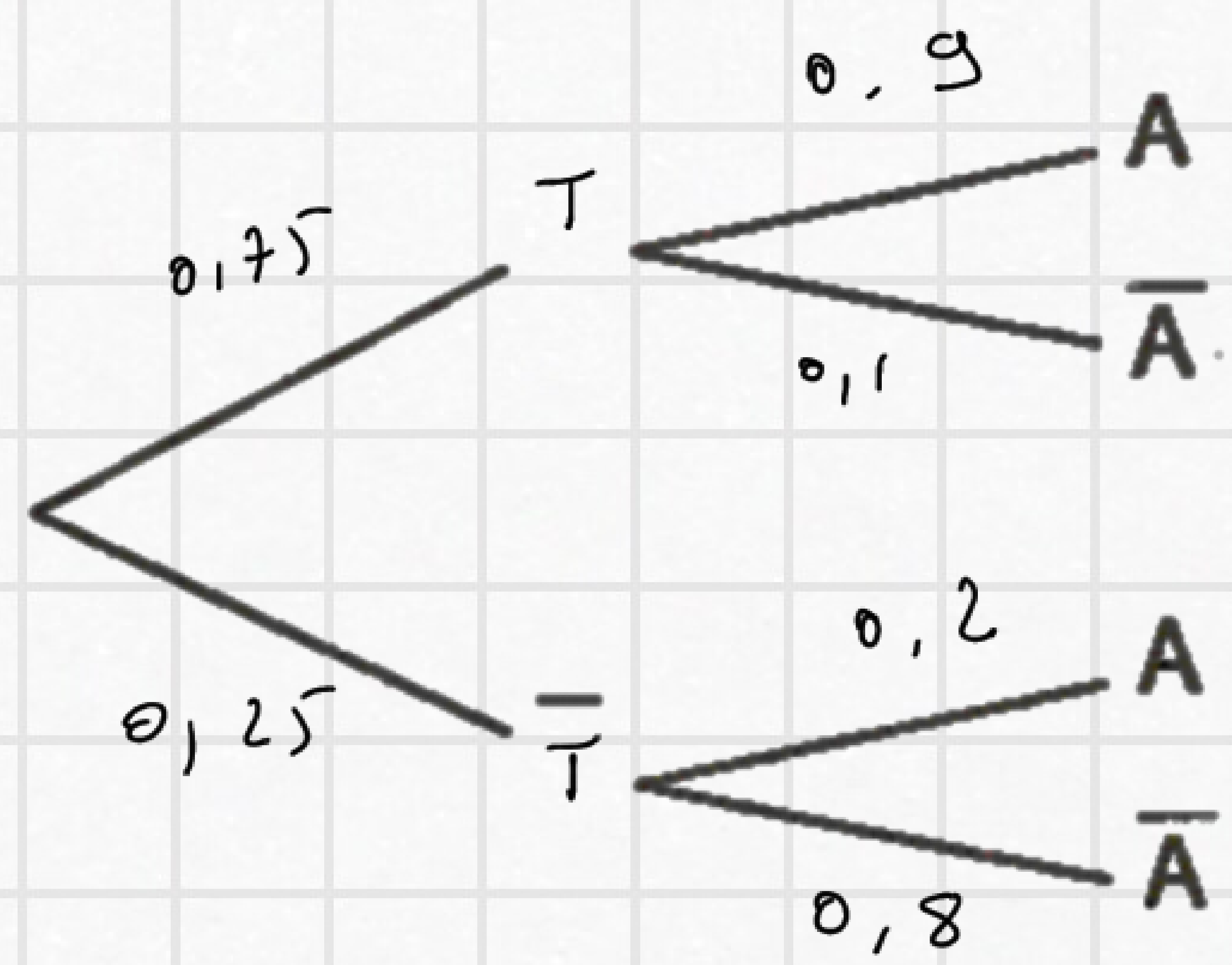
d) $\bar{T} \cap \bar{A}$.

3. a) Déterminez la probabilité que le candidat interrogé soit admis.

b) Le candidat est admis. Déterminez la probabilité que ce candidat ait travaillé sérieusement pendant l'année scolaire.

4. Démontrez que la probabilité de l'événement S est 0,125.

1)



2) $p(T\cap A) = p(T)\times p_T(A) = 0,75\times 0,9$

$= 0,675$

$p(T\cap \bar{A}) = p(T)\times p_T(\bar{A})$

$= 0,75\times 0,1 = 0,075$

$p(\bar{T}\cap A) = 0,25\times 0,2 = 0,05$

$p(\bar{T}\cap \bar{A}) = 0,25\times 0,8 = 0,2$

3) a) T et $\bar{T}$ forment une partition de l'univers et d'après la formule des probabilités totales

$p(A) = p(T\cap A) + p(\bar{T}\cap A)$

$= 0,675 + 0,05 = 0,725$

b) $p_A(T) = \dfrac{p(A\cap T)}{p(A)} = \dfrac{0,675}{0,725}$

$p_A(T) \simeq 0,931$

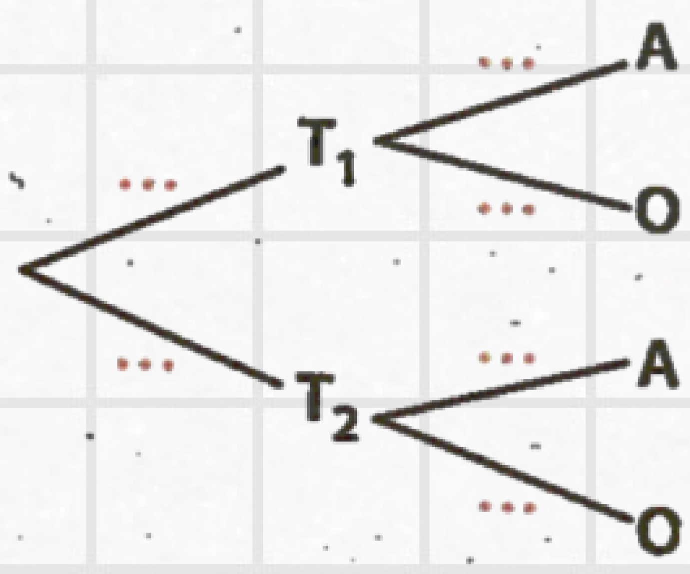
4) $p(S) = p(A\cap \bar{T}) + p(\bar{A}\cap T)$

$= 0,05 + 0,075 = 0,125$

6

Un tiroir T_1 contient cinq pièces d'or et cinq pièces d'argent, un tiroir T_2 contient quatre pièces d'or et six pièces d'argent. On choisit au hasard l'un des tiroirs et dans ce tiroir, on prend une pièce au hasard.

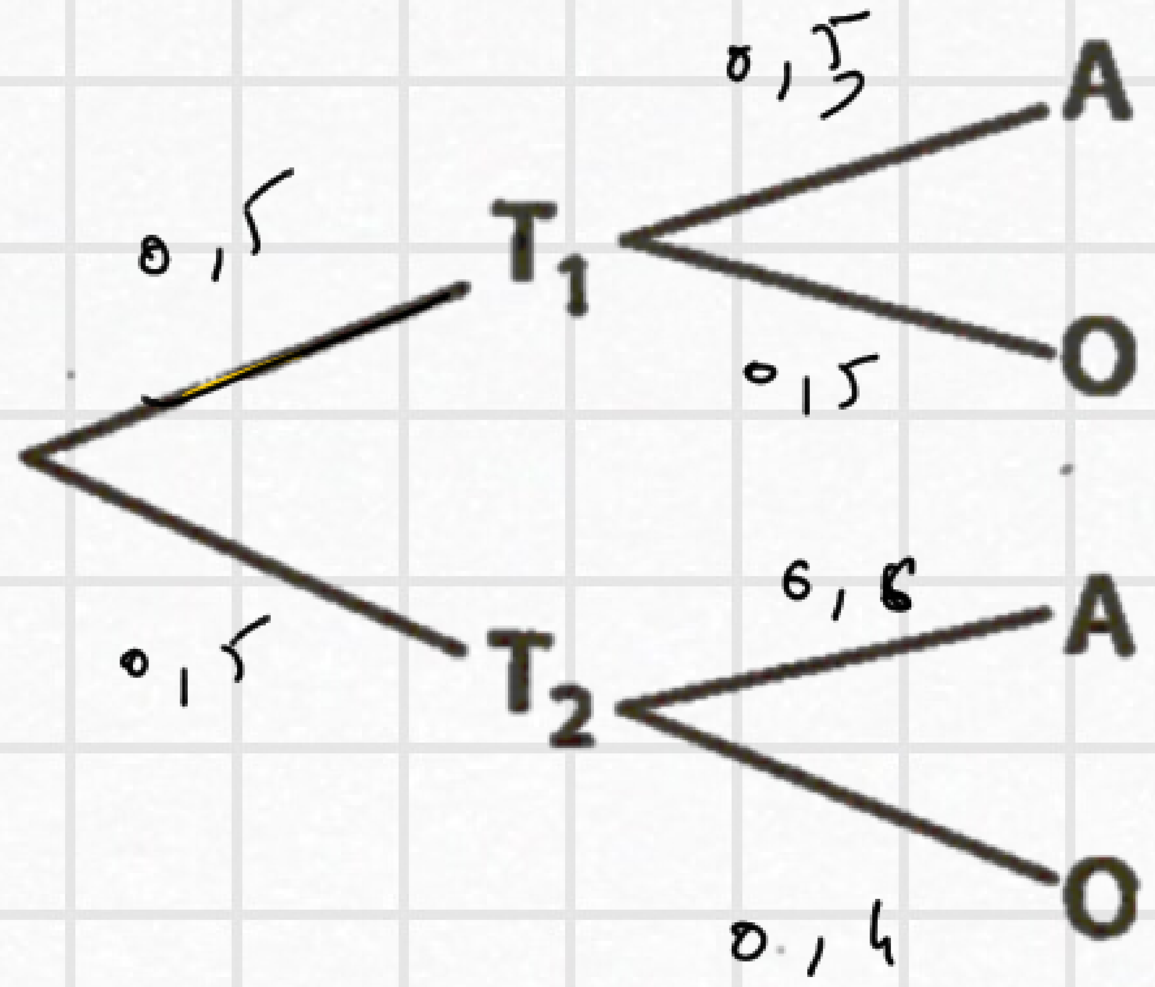
1. Recopiez puis complétez l'arbre pondéré qui représente cette expérience aléatoire. Les événements considérés sont désignés de façon naturelle par T_1, T_2, O et A.



2. a) Calculez la probabilité de prendre une pièce d'or.

b) On a extrait une pièce d'or. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de T_1 ?

1)



2) a) D'après la formule des probabilités totales

$p(O) = p(T_1\cap O) + p(T_2\cap O)$

$p(O) = p(T_1)\times p_{T_1}(O) + p(T_2)\times p_{T_2}(O)$

$= 0,5\times 0,5 + 0,5\times 0,4 = 0,45$

b) $p_O(T_1) = \dfrac{p(T_1\cap O)}{p(O)} = \dfrac{0,5^2}{0,45} = \dfrac{5}{9}$

7

Le personnel d'un hôpital est réparti entre trois catégories : médecins (M), soignants (S) et personnels administratifs ou techniques (AT).

- 12 % sont des médecins et 71 % des soignants ;
- 67 % des médecins sont des hommes et 92 % des soignants sont des femmes.

On interroge au hasard un membre du personnel.

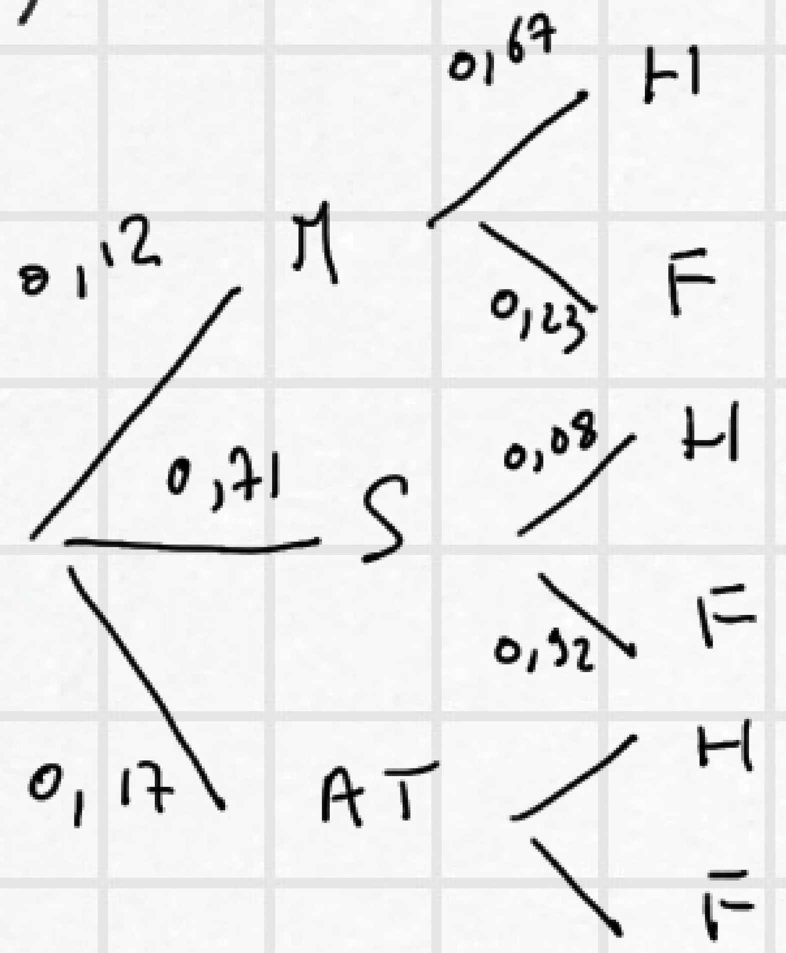
1. Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit une femme soignante ? Une femme médecin ?

2. On sait que 80 % du personnel est féminin.

a) Calculez la probabilité que la personne interrogée soit une femme AT.

b) Déduisez-en la probabilité, à 10^{-3} près, que la personne interrogée soit une femme sachant que cette personne est dans la catégorie AT.

1)



$p(F \cap S) = p(S) \times p_S(F) = 0{,}71 \times 0{,}92 = 0{,}6532$

$p(F \cap M) = p(M) \times p_M(F) = 0{,}12 \times 0{,}23 = 0{,}0273$

2) a) $p(F) = 0{,}8$

D'après la formule des probabilités totales

$p(F) = p(F \cap M) + p(F \cap S) + p(F \cap AT)$

donc $p(F \cap AT) = p(F) - p(F \cap M) - p(F \cap S)$

$= 0{,}8 - 0{,}6532 - 0{,}0273$

$= 0{,}1195$

b) $p_{AT}(F) = \dfrac{p(F \cap AT)}{p(AT)} = \dfrac{0{,}1195}{0{,}17} \simeq 0{,}7$

8

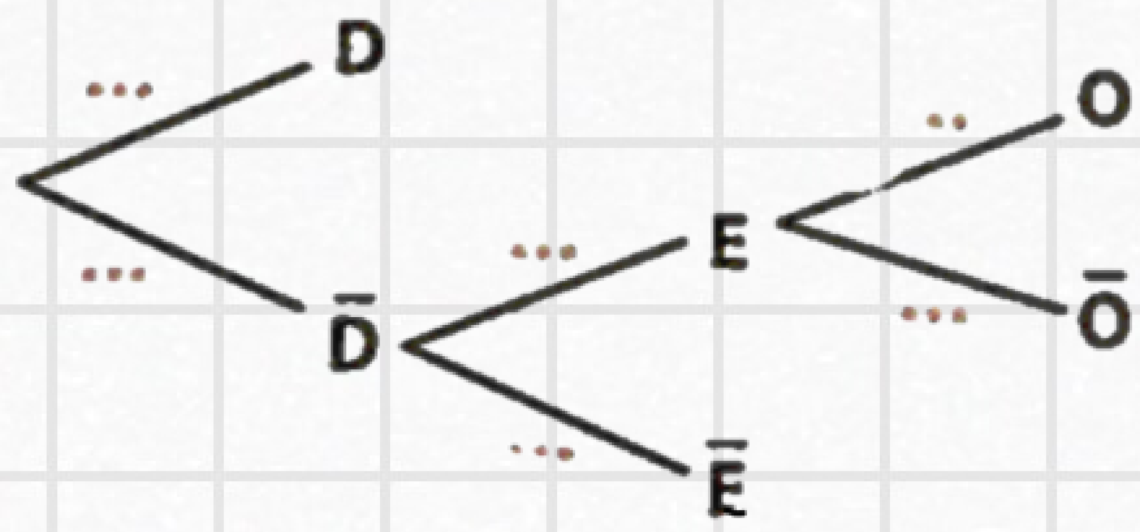
Une école d'ingénieurs organise la sélection de ses futurs étudiants de la manière suivante :

- après examen de leur dossier scolaire, 15 % des candidats sont admis directement ;
- tous les autres candidats passent une épreuve écrite dont le taux de réussite est estimé à 60 % ;
- tous les candidats ayant réussi l'épreuve écrite sont convoqués pour passer une épreuve orale. Ceux qui réussissent l'épreuve orale sont alors admis.

On estime que les candidats ont une chance sur trois de réussir l'épreuve orale.

On choisit un candidat au hasard.
On considère les événements suivants :
D : « Le candidat est admis sur dossier » ;
E : « Le candidat passe et réussit l'épreuve écrite » ;
O : « Le candidat passe et réussit l'épreuve orale » ;
A : « Le candidat est admis ».

1. Recopiez puis complétez l'arbre pondéré décrivant les différentes étapes de la sélection.



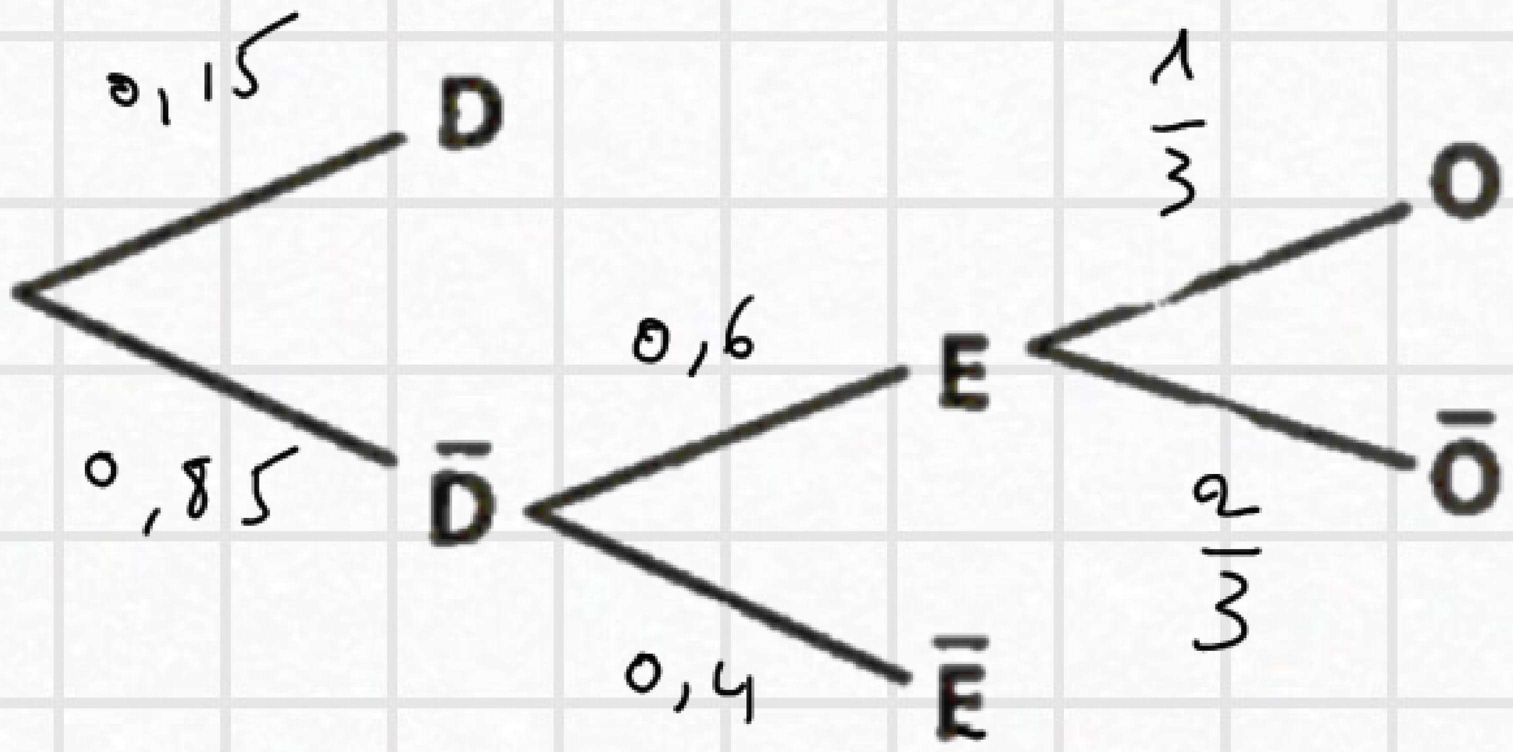
2. Calculez les probabilités P(E) et P(O).

3. Justifiez que la probabilité que le candidat soit admis est $P(A) = 0{,}32$.

4. Parmi les candidats admis, quelle est la proportion de ceux qui ont été admis sur dossier ?

---

1)



2) $p(E) = 0{,}85 \times 0{,}6 = 0{,}51$

$p(O) = 0{,}85 \times 0{,}6 \times \frac{1}{3} = 0{,}17$

3) $A = D \cup O$

or $D \cap O = \emptyset$

donc D et O sont incompatibles

ainsi $p(A) = p(D) + p(O)$

$p(A) = 0{,}15 + 0{,}17 = 0{,}32$

4) $p_A(D) = \dfrac{p(A \cap D)}{p(A)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}32} = \dfrac{15}{32}$

Parmi les candidats admis le pourcentage de ceux admis sur dossier est d'environ 47 %.

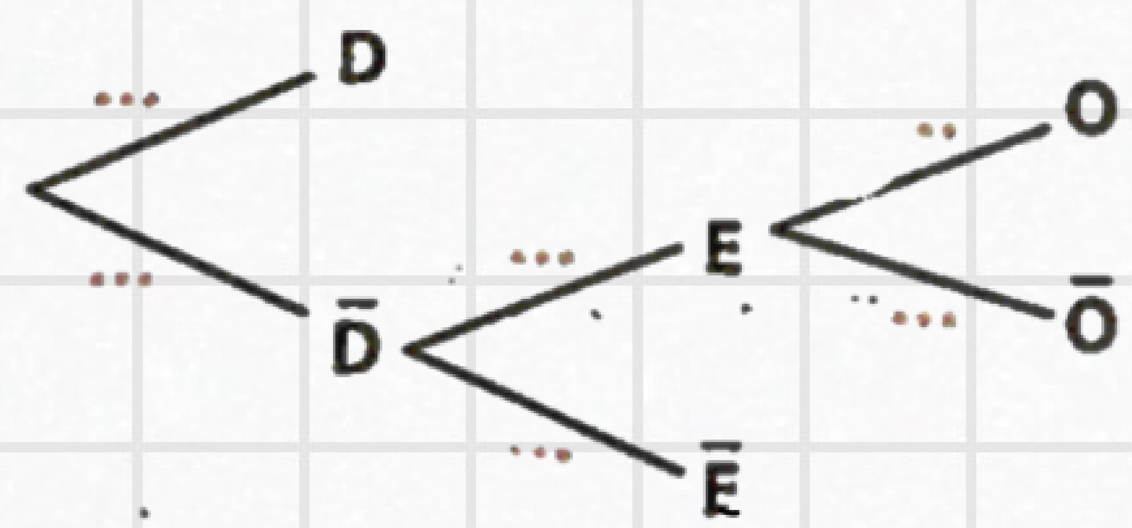
Une école d'ingénieurs organise la sélection de ses futurs étudiants de la manière suivante :

- après examen de leur dossier scolaire, 15 % des candidats sont admis directement ;
- tous les autres candidats passent une épreuve écrite dont le taux de réussite est estimé à 60 % ;
- tous les candidats ayant réussi l'épreuve écrite sont convoqués pour passer une épreuve orale. Ceux qui réussissent l'épreuve orale sont alors admis.

On estime que les candidats ont une chance sur trois de réussir l'épreuve orale.

On choisit un candidat au hasard.
On considère les événements suivants :
D : « Le candidat est admis sur dossier » ;
E : « Le candidat passe et réussit l'épreuve écrite » ;
O : « Le candidat passe et réussit l'épreuve orale » ;
A : « Le candidat est admis ».

1. Recopiez puis complétez l'arbre pondéré décrivant les différentes étapes de la sélection.



2. Calculez les probabilités P(E) et P(O).

3. Justifiez que la probabilité que le candidat soit admis est $P(A) = 0{,}32$.

4. Parmi les candidats admis, quelle est la proportion de ceux qui ont été admis sur dossier ?