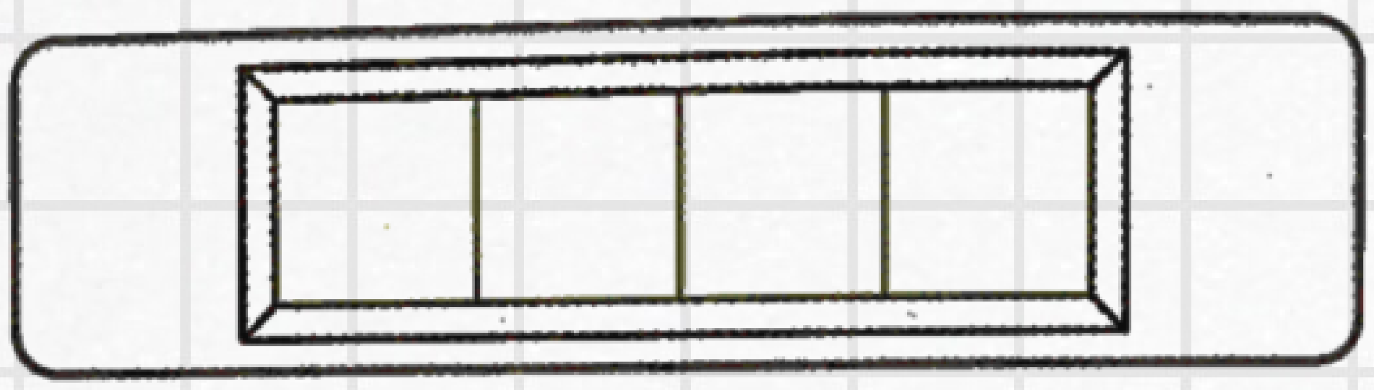
Probabilités et variables aléatoires

ex1

Un processus aléatoire affiche l'un des nombres, −1 ou +1, dans les cases successives d'un écran.



1. Représentez la situation par un arbre où toutes les issues sont équiprobables.

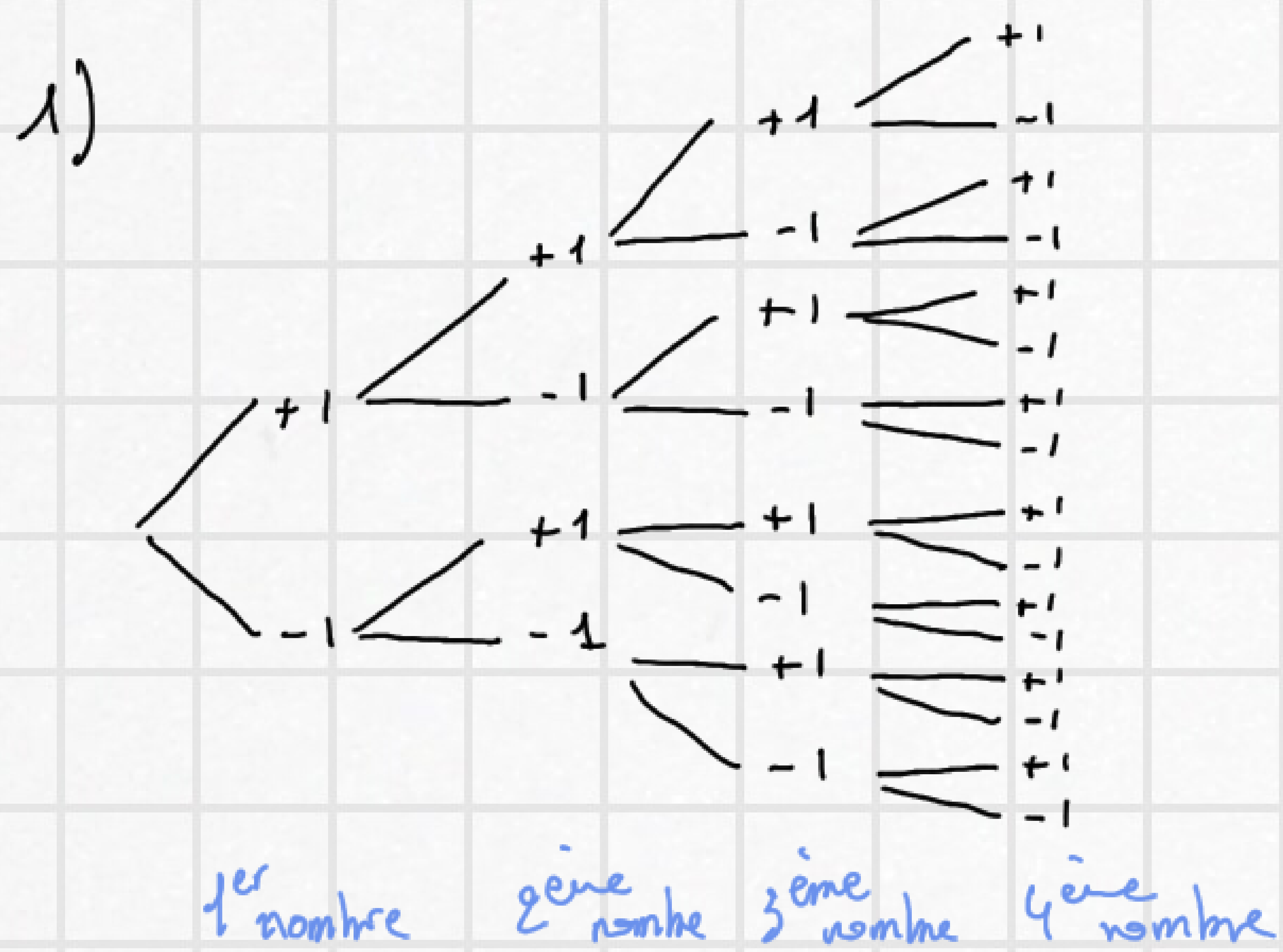
2. Calculez la probabilité de chacun des événements :

a) la somme des nombres est nulle ;

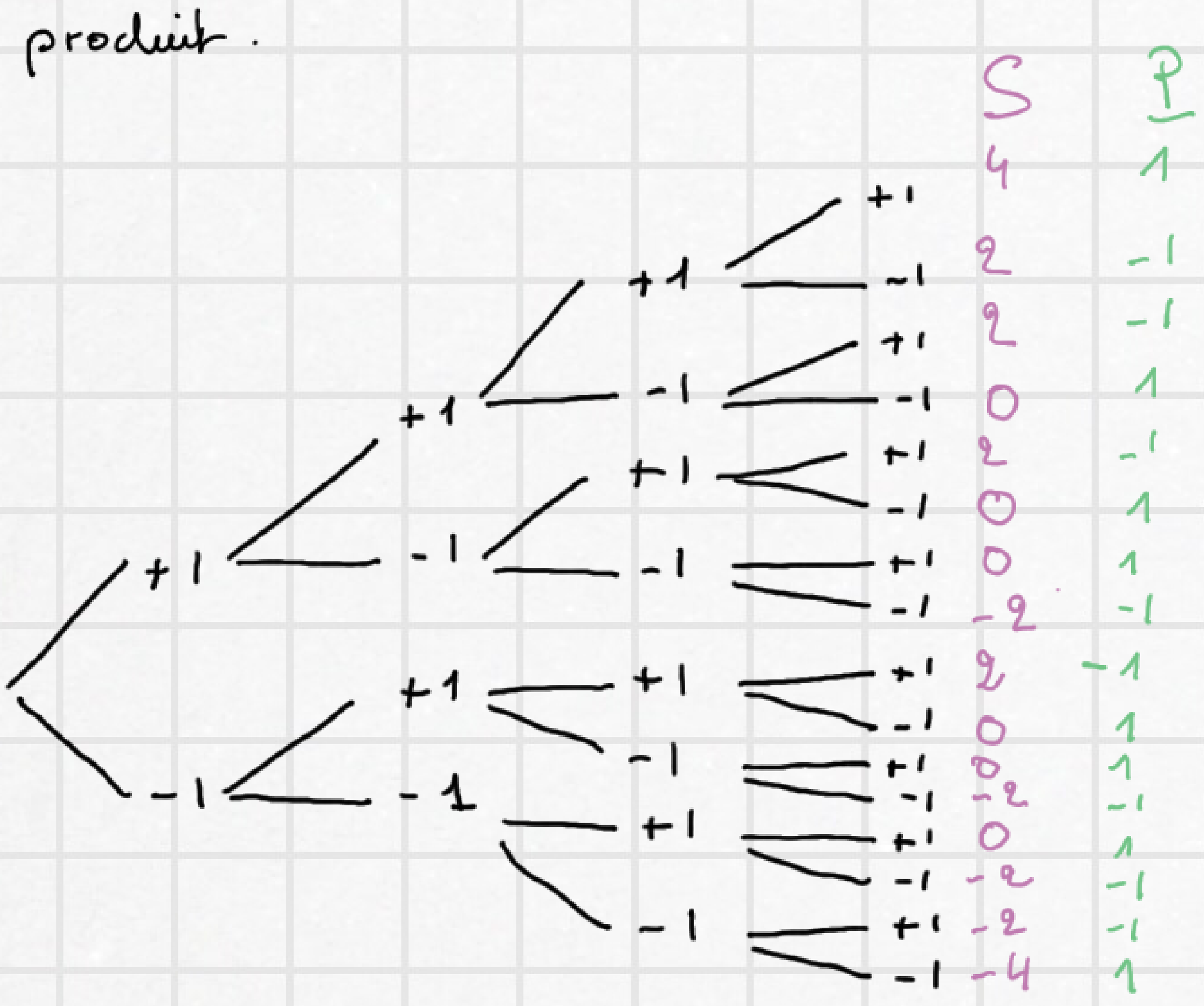
b) le produit des nombres vaut 1 ;

c) la suite de nombres est alternée.

1)



2) Notons S la somme des nombres et P leur produit.



a) Nous sommes en situation d'équiprobabilité donc $p(S=0)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

b) $p(P=1)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

Notons C, l'événement la suite est alternée

c) $C=\{-1+1-1+1\ ;\ 1-1+1-1\}$

donc $p(C)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

ex2

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires, toutes indiscernables au toucher.

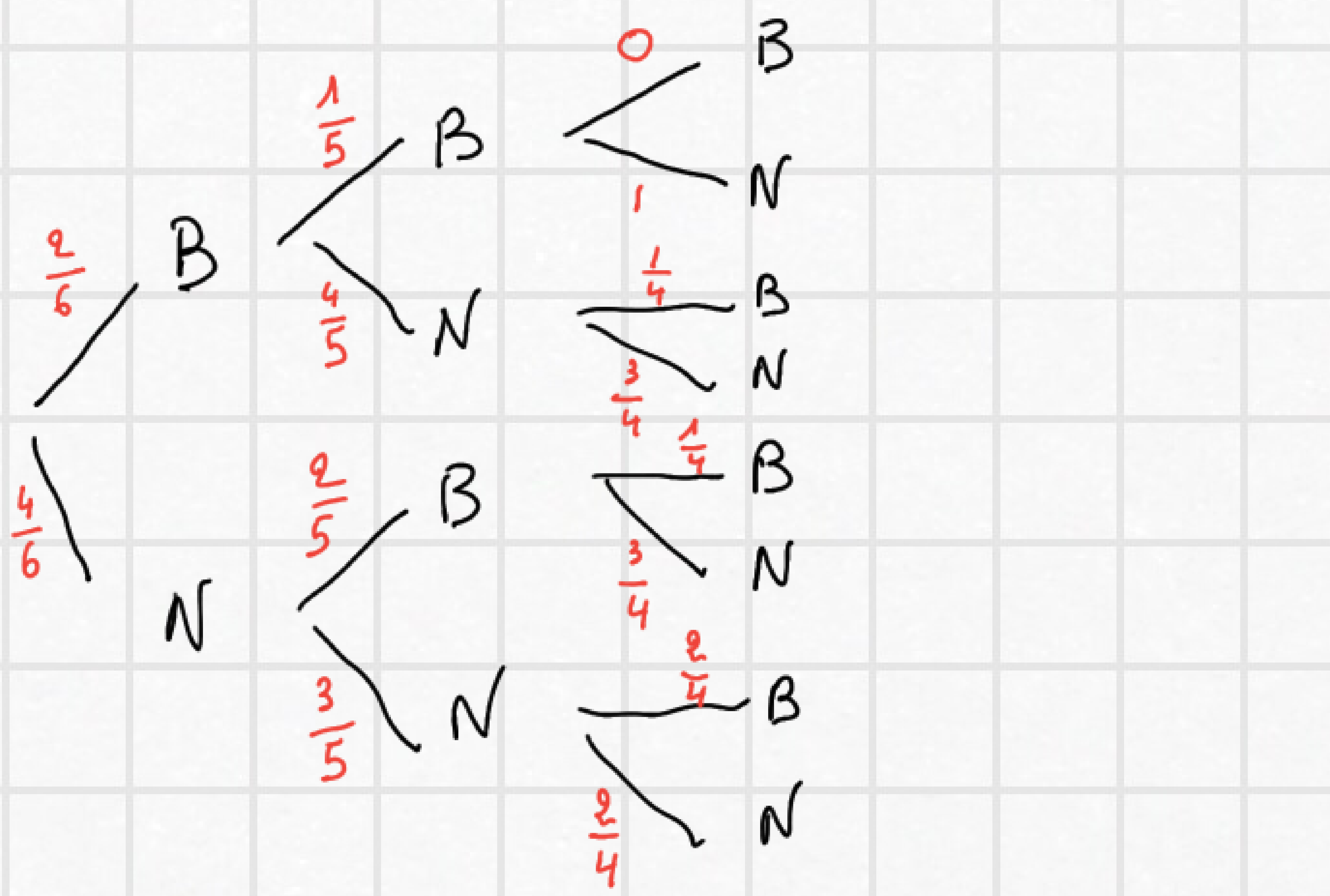
1. On tire successivement, au hasard, trois boules sans remise. Quelles sont les probabilités des événements :

- A : « le tirage ne contient aucune boule blanche » ;
- B : « le tirage contient une seule boule blanche » ;
- C : « le tirage contient deux boules blanches ».

2. a) Même question dans le cas d'un tirage avec remise.

b) A-t-on P(A) + P(B) + P(C) = 1 ? Pourquoi ?

1) Représentons cette situation par un arbre pondéré. Lorsqu'une boule est tirée, le nombre de boules présentes dans l'urne diminue d'une unité. Notons B, l'événement une boule blanche est tirée et N, une boule noire est tirée.



$p(A) = p(NNN) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

$p(B) = p(BNN) + p(NBN) + p(NNB)$

$= \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$

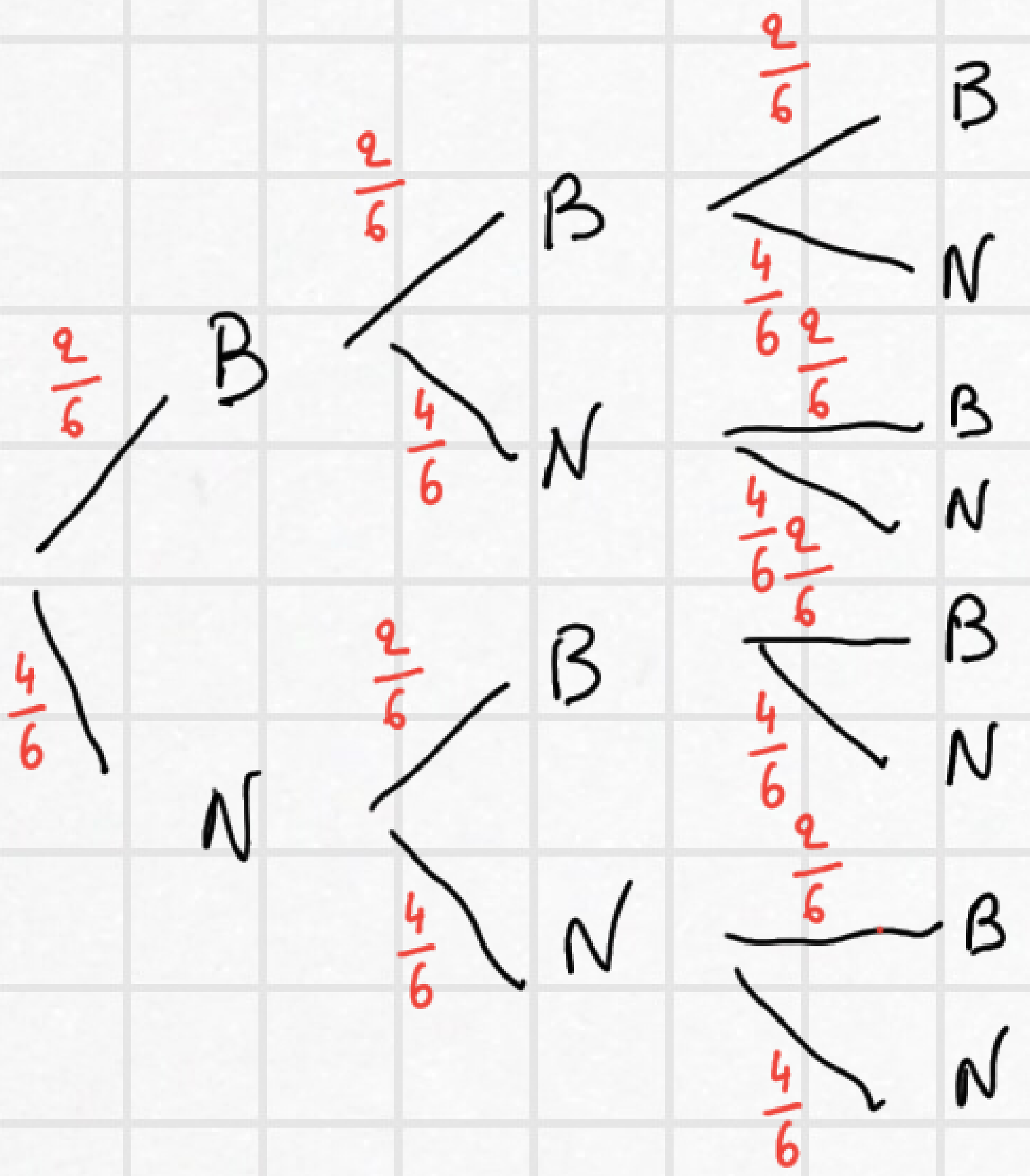
$= \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$

$p(C) = p(BBN) + p(BNB) + p(NBB)$

$= \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

2a) Dans le cas d'un tirage avec remise



$p(A) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

$p(B) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times 3 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

$p(C) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times 3 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

b) Dans le premier cas, sans remise, on a $p(A) + p(B) + p(C) = 1$ car l'événement "tirer 3 boules blanches" est impossible. On ne peut donc tirer que 0, 1 ou 2 boules blanches.

Dans le deuxième cas, l'événement "tirer 3 boule blanche" n'a pas une probabilité nulle. Donc $p(A) + p(B) + p(C) < 1$

ex13

On lance deux dés cubiques parfaits :
- **un dé bleu dont quatre faces portent le numéro 1 et les autres le numéro 6 ;**
- **un dé rouge dont deux faces portent le numéro 1, une face le numéro 6 et les autres, le numéro 4.**

1. Quelle est la probabilité qu'on obtienne :

a) une somme égale à 2 ?

b) une somme égale à 7 ?

2. Les sommes possibles sont-elles équiprobables ?

1) Puisqu'il n'y a que 2 dés, nous pouvons utiliser un tableau à double entrée.

R \ B	1	1	1	1	6	6
1	2	2	2	2	7	7
1	2	2	2	2	7	7
6	7	7	7	7	12	12
4	5	5	5	5	10	10
4	5	5	5	5	10	10
4	5	5	5	5	10	10

On note S la somme des 2 faces.

1a) Toutes les issues associées à chacune des cases sont équiprobables.

$p(S = 2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

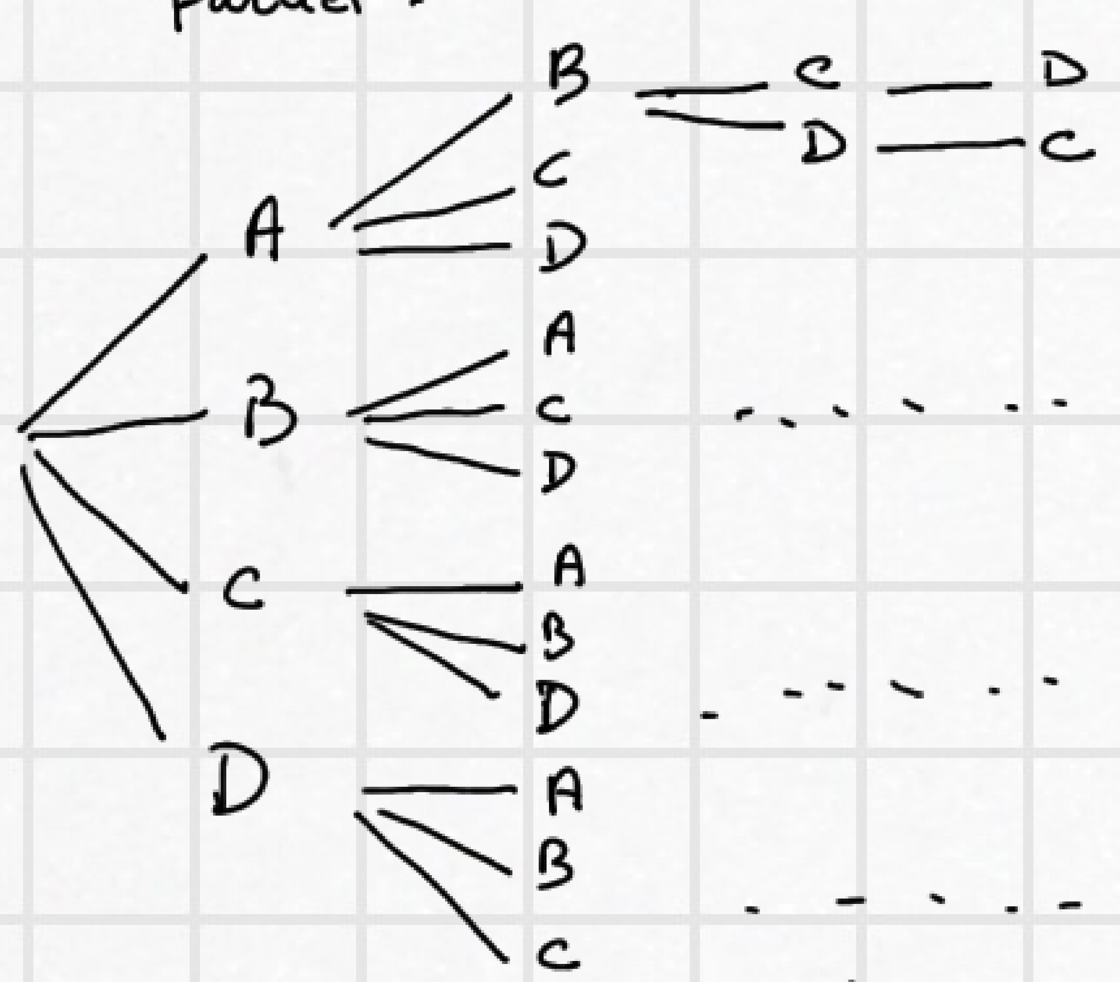
b) $p(S = 7) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

b) Toutes les sommes ne sont pas equiprobables.
Par exemple $p(S=10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \neq \frac{2}{9}$

ex3

Chaque jour, un représentant doit se rendre dans quatre villes A, B, C et D. Après ses visites, il revient à son point de départ.
Par exemple, ABDCA et DCABD sont des trajets possibles.
1. Quel est le nombre de trajets possibles ?
2. Le représentant choisit son trajet au hasard. Quelles sont les probabilités des événements suivants ?
• T : « La ville B est visitée avant la ville A ».
• U : « Les villes B et C se suivent dans cet ordre ».
• V : « Les villes B, A et C se suivent dans cet ordre ».

1) Représentons la situation par un arbre partiel.



1ère ville 2ème ville 3ème ville 4ème ville

Il y a 4 choix pour la première ville, puis 3 choix pour la 2ème, 2 choix pour la 3ème et un choix pour la 4ème, (puis 1 choix pour la 5ème qui est la même ville que la 1ère).
Cet arbre comporte donc $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ branches. Ces 24 chemins (événements élémentaires) sont équiprobables.

2) La difficulté est de dénombrer tous les événements possibles sans en oublier.

2) Le plus simple est peut-être de dénombrer les issues favorables.

T :

BACD	CBAD
BADC	CBDA
BCAD	CDBA
BCDA	DBAC
BDAC	DBCA
BBCA	DCBA

$p(T) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

U :

BCAD	ADBC
BCAD	DABC
ABCD	
DBCA	

$p(U) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

V : BACD
DBAC

$p(V) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

ex4

Marie a écrit chacune des lettres de son prénom sur des cartons identiques qu'elle place dans un sac. Louis tire au hasard, un à un, chacun des cartons. Il obtient un anagramme du mot MARIE (par exemple : RMIAE).
1. Combien y a-t-il d'anagrammes possibles ?

2. Calculez la probabilité de chacun des événements :
- S : « l'anagramme obtenu est AIMER » ;
- V : « l'anagramme commence par une voyelle » ;
- C : « l'anagramme se termine par une consonne » ;
- T : « l'anagramme commence par une voyelle ou se termine par une consonne ».

---

1) Les lettres sont toutes distinctes. Il y a 5 lettres dans le mot "AIMER". Il y a donc 5 choix pour la 1ère lettre, puis 4 choix pour la 2ème, 3 pour la 3ème, 2 pour la 4ème et 1 pour la dernière soit :

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ choix soit 120 anagrammes

2) Les événements élémentaires sont équiprobables et ont une probabilité de $\frac{1}{120}$ d'être réalisés. "AIMER" est l'un d'entre eux donc $p(S) = \frac{1}{120}$.

- Pour l'événement V, l'anagramme commence par une voyelle. Il y a 3 voyelles dans le mot "MARIE" donc 3 choix pour la 1ère lettre de l'anagramme.

Il reste ensuite 4 lettres possibles pour la 2ème lettre, puis 3 pour la 3ème, etc...

3	4	3	2	1
1ère lettre	2ème lettre	3ème lettre	4ème lettre	5ème lettre

Soit $3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 72$ anagrammes commence par une voyelle

$$p(V) = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$$

- Pour l'événement C, le mot se termine par une consonne (il y a autant d'anagrammes se terminant par une consonne que commençant par une consonne, on peut donc appliquer le raisonnement précédent.

2	4	3	2	1

dernière lettre

Il y a 2 consonnes dans "MARIE". Il y a donc $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$ anagrammes se terminant (ou commençant) par une consonne.

Donc $p(C) = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$

- $T = C \cup V$

et d'après la formule :

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

on a :

$p(T) = p(C) + p(V) - p(C \cap V)$

Il faut donc calculer $p(C \cap V)$ donc que l'anagramme commence par une voyelle et se termine par une consonne. Comme nous l'avons vu précédemment, l'ordre des lettres n'importe pas. Imposer la première et la dernière lettre peut se ramener à imposer la première et la seconde. Dans le mot MARIE, il y a 3 voyelles et 2 consonnes

3	2	3	2	1

Choix indifférent.
parmi les 3 lettres qui restent

1ère lettre VOYELLE

Dernière lettre CONSONNE

Soit $3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 36$ anagrammes

$$p(C \cap V) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

Donc $p(T) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{3}{10}$

$$p(T) = \frac{7}{10}$$

ex 5

Un relevé de caisse de magasin a fourni les renseignements suivants concernant les modes de paiement et les montants des achats :

- 80 % des achats sont payés par chèque;
- 70 % des achats sont d'un montant inférieur à 200 € et parmi eux, 20 % sont réglés en espèces;
- 2 % des clients utilisent une carte de paiement qui ne permet pas de régler des achats supérieurs à 200 €.

1. Recopiez puis complétez le tableau ci-dessous.

Mode de paiement	Montant M		
	M ⩽ 200	M > 200	Total
Espèces			
Chèque			80 %
Carte de paiement			
Total	70 %		

2. Le directeur consulte au hasard la fiche d'un client. Calculez la probabilité des événements suivants :

- A : « L'achat dépasse 200 € »;
- B : « L'achat dépasse 200 € et il est payé en espèces »;
- C : « L'achat dépasse 200 € ou il est réglé en espèces ».

3. a) Le directeur consulte au hasard la fiche d'un client qui règle en espèces.
Quelle est la probabilité que le montant dépasse 200 € ?

b) Le directeur consulte au hasard la fiche d'un client dont le montant des achats ne dépasse pas 200 €.
Quelle est la probabilité que ce montant soit réglé par chèque ?

1)

Mode de paiement	Montant M		
	M ⩽ 200	M > 200	Total
Espèces	14 %	4 %	18 %
Chèque	54 %	26 %	80 %
Carte de paiement	2 %	0 %	2 %
Total	70 %	30 %	100 %

- 20 % de 70 % : 14 % des paiement sont faits en espèces et ont un montant de moins de 200 €
- 30 % des paiements ont un montant supérieur à 200 €
- Il reste $70 - 2 - 14 = 54$

Soit 54 % de paiements réalisés par chèque pour un montant de moins de 200 €

2) $p(A) = 0,3$ (30 %)

$p(B) = 0,04$ (4 %)

$$p(C) = 0,14 + 0,04 + 0,26 = 0,44$$

Attention à ne pas additionner 18 et

33.

3a) Notons p la probabilité cherchée :

$$p = \frac{4}{18}$$

→ 4% des clients règlent en espèces un montant de plus de 200 €

→ 18% des clients règlent en espèces

$$p = \frac{2}{9}$$

3b) Notons p' cette probabilité

$$p' = \frac{54}{70} = \frac{27}{35}.$$

ex6

Un sac contient quatre jetons indiscernables portant les lettres : A; L; E; A. On tire successivement, sans remise, deux jetons du sac.

1. Quel est le nombre d'issues ?

2. Combien de tirages ne comportent aucun A ?

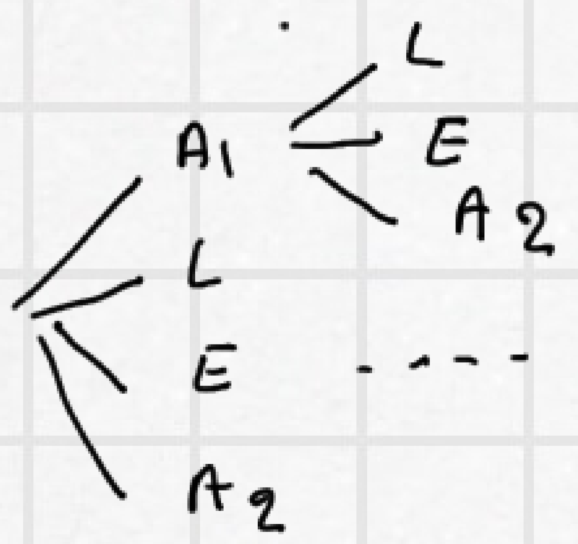
3. Combien de tirages comportent deux A ?

4. On note N la variable aléatoire qui indique le nombre de A obtenus.

a) Quelle est la loi de probabilité de N ?

b) Quelle est l'espérance mathématique de N ?

1) Distinguons les 2 lettres A : A_1 et A_2.
Dans ce cas il y a 4 choix pour la 1ère lettre, et 3 choix pour la 2ème lettre. Il y a donc au total 12 issues, on peut représenter cette expérience aléatoire par un arbre ou un tableau à double entrée.



choix de la 1ère lettre / choix de la 2ème lettre.

ou

① \ ②	A_1	L	E	A_2
A_1		A_1-L	A_1-E	
L				
E				
A_2				

Ces issues sont équiprobables.
Si l'on ne distingue pas les deux "A", il n'y a plus que les issues AL - AE - AA - LA - EA - EL et LE mais elles ne sont pas équiprobables.
Nous nous placerons dans le cas où les A sont distingués, dans l'univers contenant 12 issues équiprobables.

2) Seuls 2 tirages ne comportent aucun "A" : LE et EL.

3) Il y a 2 tirages comportant 2 "A" : A_1A_2 et A_2A_1

4a) $p(N=0) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$p(N=2) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

or $p(N=0) + p(N=1) + p(N=2) = 1$

donc $p(N=1) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

n_i	0	1	2
$p(N=n_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

b) $E(N) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$

ex 7

Dans une enveloppe, on place cinq jetons indiscernables portant les numéros $-2\,;-1\,;0\,;1\,;2$. On tire au hasard un jeton. À chaque jeton, on associe le carré du numéro tiré.
On définit ainsi une variable aléatoire C.

1. Quelle est la loi de probabilité de C ?

2. Calculez l'espérance et la variance de C.

1) $C \in \{0\,;\,1\,;\,2\}$.

c_i	0	1	2
$p(C=c_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

2) $E(C) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{2}{5}$

$E(C) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$

$V(C) = \frac{1}{5}\left(0 - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(1 - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(2 - \frac{6}{5}\right)^2 = \frac{14}{25}$

ex 8

Une association sportive organise une loterie. Les 2 000 billets vendus sont numérotés de 1 à 2 000.
Parmi tous les billets :
– un billet rapporte un lot de 1 500 € ;
– deux billets rapportent chacun un lot de 150 € ;
– cinq billets rapportent chacun un lot de 100 €.
Le prix du billet est fixé à 2 €. Les billets achetés sont choisis au hasard.
À chaque billet, on associe le gain algébrique G qu'il procure à l'acheteur.

1. a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par G ?

b) Calculez la probabilité $P(G=-2)$.

2. Dressez le tableau de la loi de probabilité de G.

3. Calculez l'espérance de G. Qu'en concluez-vous ?

1a) En tenant compte du prix du billet
$G \in \{-2\,;\,98\,;\,148\,;\,1498\}$

1b) Parmi les 2000 billets, il y en a $2000 - 1 - 2 - 5 = 1992$ qui ne rapportent aucun lot donc

$p(G=-2) = \frac{1992}{2000} = \frac{249}{250}$

g_i	-2	98	148	1498
$p(G=g_i)$	$\frac{249}{250}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{2000}$

3) $E(G) = -2 \times \frac{249}{250} + 98 \times \frac{1}{400} + 148 \times \frac{1}{1000} + 1498 \times \frac{1}{2000}$

$E(G) = -\frac{17}{20} = -0{,}85$

$E(G) < 0$ donc ce jeu est défavorable au joueur.

ex 9

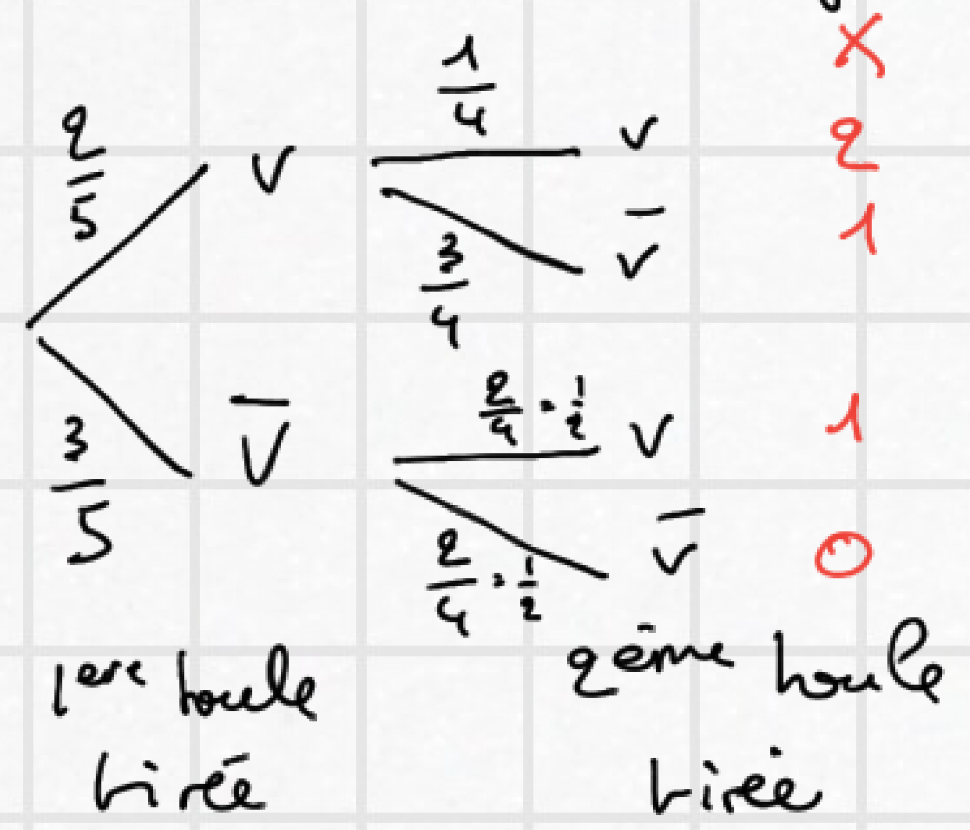
Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.
On extrait, l'une après l'autre, sans remise, deux boules de l'urne.
À chaque issue, on associe le nombre de boules vertes obtenues. On définit ainsi une variable aléatoire X.

1. a) Calculez P(X = 0).

b) Déterminez la loi de probabilité de X.

2. Calculez E(X). Interprétez ce résultat.

1a) Modélisons cette expérience aléatoire par un arbre pondéré. Il n'y a pas de remise. Notons V le tirage d'une boule verte et $\bar{V}$ le tirage d'une boule rouge.



$X \in \{0; 1; 2\}$

$$p(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

b)

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$p(X=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$p(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

2) $E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10}$

$$E(X) = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Le joueur, s'il joue un grand nombre de fois tirera en moyenne 0,8 boules vertes par tirage.

---

ex 10

La production journalière de tiges filetées d'un atelier de mécanique est indiquée dans le tableau ci-dessous où ℓ désigne la longueur et d désigne le diamètre, exprimés en millimètres.

ℓ \ d	15,8	16	16,1	16,3
84	5	9	6	0
85	15	19	21	4
86	12	6	12	7
87	6	7	6	5

On choisit au hasard une tige pour effectuer un test de conformité. L est la variable aléatoire qui indique la longueur de la tige et D, celle qui indique son diamètre.

1. Donnez la loi de probabilité de D.

2. Donnez la loi de probabilité de L.

3. La tige est usinée de nouveau (événement noté U) si l'événement « L > 85,5 et D > 16 » est réalisé.
La tige est envoyée au rebut (événement noté R) si l'événement « D > 15,9 ou L > 84,5 » n'est pas réalisé.
Calculez P(U) et P(R).

---

1)

d_i	15,8	16	16,1	16,3
$p(D=d_i)$	$\frac{19}{70}$	$\frac{41}{140}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{4}{35}$

$$p(D=15{,}8) = \frac{38}{140} = \frac{19}{70}$$

2)

l_i	84	85	86	87
$p(L=l_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{59}{140}$	$\frac{37}{140}$	$\frac{6}{35}$

$$p(L=84) = \frac{5+9+6}{140} = \frac{20}{140}$$

3) • $LI = (L>85{,}5) \cap (D>16)$

$$LI = (L \geq 86) \cap (D \geq 16{,}1)$$

ET

ℓ \ d	15,8	16	16,1	16,3
84	5	9	6	0
85	15	19	21	4
86	12	6	12	7
87	6	7	6	5

$$p(LI) = \frac{30}{140} = \frac{3}{14}$$

• $R = (D>15{,}9) \cup (L>84{,}5)$

$$R = (D \geq 16) \cup L(\geq 85)$$

OU

ℓ \ d	15,8	16	16,1	16,3
84	5	9	6	0
85	15	19	21	4
86	12	6	12	7
87	6	7	6	5

$$p(R) = \frac{140-5}{140} = \frac{135}{140} = \frac{29}{28}$$

---

ex 11 Un dispositif électronique commande l'allumage des fusées lors d'un feu d'artifice. Il envoie un code qui est un nombre aléatoire de six chiffres ne pouvant prendre que les valeurs 0 et 1.

Exemple de code : | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

N est la variable aléatoire qui indique le nombre de 1.

1. Dressez le tableau de la loi de probabilité de N.

2. Calculez l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire N.

---

1) Il y a $2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^6 = 64$ codes possibles.

- 1 code ne contient que des "0"
- 1 code ne contient que des "1"
- 6 codes contiennent un "1" et 5 "0"
- 6 codes contiennent un "0" et 5 "1"

Exemple :

1 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0
0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 1

- Nombre de codes contenant 2 "1" et 4 "0" ou 2 "0" et 4 "1"

1 1 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0
1 0 0 1 0 0
1 0 0 0 1 0
1 0 0 0 0 1
0 1 1 0 0 0
0 1 0 1 0 0
0 1 0 0 1 0

0 1 0 0 0 1

0 0 1 1 0 0

0 0 1 0 1 0

0 0 1 0 0 1

0 0 0 1 1 0

0 0 0 1 0 1

0 0 0 0 1 1

Soient 15 codes.

- Nombre de codes contenant 3 "1" et 3 "0"

1 1 1 0 0 0

1 1 0 1 0 0

1 1 0 0 1 0

1 1 0 0 0 1

1 0 1 1 0 0

1 0 1 0 1 0

1 0 1 0 0 1

1 0 0 1 1 0

1 0 0 1 0 1

1 0 0 0 1 1

0 1 1 1 0 0

0 1 1 0 1 0

0 1 1 0 0 1

0 1 0 1 1 0

0 1 0 1 0 1

0 1 0 0 1 1

0 0 1 1 1 0

0 0 1 1 0 1

0 0 1 0 1 1

0 0 0 1 1 1

Soient 20 codes et en tout 64 codes.

n_i	$P(N=n_i)$
0	$\frac{1}{64}$
1	$\frac{6}{64} = \frac{3}{32}$
2	$\frac{15}{64}$
3	$\frac{20}{64} = \frac{5}{16}$
4	$\frac{15}{64}$
5	$\frac{6}{64} = \frac{3}{32}$
6	$\frac{1}{64}$

2) $E(N) = 3$

$V(N) = 1,5$

ex 12

Un club de randonnée propose à ses adhérents une sortie payante suivant les tarifs indiqués ci-après.

Catégorie	A (adultes)	J (jeunes)	E (enfants)
Sortie	20 €	13 €	7 €
Repas	12 €	7 €	4 €

Le club inscrit 87 participants pour cette sortie dont 58 adultes et 12 enfants. La moitié des adultes, un quart des enfants et dix jeunes ont apporté leur pique-nique.
On choisit un participant au hasard.
On note X la variable aléatoire qui indique le prix payé au club par un participant.

1) Quelles sont les valeurs prises par X ?

2a) Prenez le tableau de la loi de probabilité de X.

b) Sur quel tarif moyen par adhérent peut compter ce club s'il renouvelle un grand nombre de fois ce type de sortie dans les mêmes conditions ?

---

1) X peut prendre des valeurs suivant que les participants prennent ou non leur repas soit :

$20, 13, 7, \underbrace{20+12}_{32}, \underbrace{13+7}_{20}, \underbrace{7+4}_{11}$

$X \in \{7; 11; 13; 20; 32\}$

2a) 29 adultes prennent le repas : 32 €
29 adultes ne le prennent pas : 20 €
9 enfants prennent le repas : 11 €
3 ne le prennent pas : 7 €
Il reste 17 jeunes.
7 jeunes prennent le repas : 20 €
10 jeunes ne le prennent pas : 13 €

x_i	$p(X=x_i)$
7	$\frac{3}{87}$
11	$\frac{9}{87}$
13	$\frac{10}{87}$
20	$\frac{36}{87}$
32	$\frac{29}{87}$

2b) $E(X) = 12,5$
Le Club peut compter sur un tarif moyen de 12,5 €

---

ex 13

Au cirque

Sept chevaux pénètrent successivement sur la piste. Parmi eux, trois sont blancs, les autres sont noirs**. L'ordre d'apparition des chevaux est choisi au hasard.**

1. On note X la variable aléatoire qui donne le rang d'entrée du premier cheval blanc.
Définissez la loi de probabilité de X.

2. Sur un grand nombre de représentations, en moyenne, quel est le rang d'apparition du premier cheval blanc ?

---

1) Choisissons de distinguer les chevaux : B1, B2, B3, N1, N2, N3 et N4.
Dans cet univers, il y a :
$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ possibilités différentes d'apparition correspondant à 7 choix pour le 1er cheval puis 6 pour le 2ème, 5 pour le 3ème jusqu'à 1 pour le premier.

$X \in \{1;2;3;4;5\}$

$X \leq 5$ car le 1er cheval ne peut pas se trouver à la 6ème ou la 7ème position car il y en a 3.

• $X = 1$:

3	6	5	4	3	2	1

Le premier cheval est blanc
↳ Les autres sont indifférents

Soit 2160 possibilités

• $X = 2$:

4	3	5	4	3	2	1

Noir Blanc $\underbrace{\quad\quad}_{\text{indifférent}}$

Soit 1440 possibilités.

• $X = 3$

4	3	3	4	3	2	1

Noir Noir Blanc $\underbrace{\quad\quad}_{\text{indifférent}}$

Soit 864 possibilités

• $X = 4$

4	3	2	3	3	2	1

Noir Noir Noir Blanc indifférent

Soit 432 possibilités

• $X = 5$

4	3	2	1	3	2	1

Noir Noir Noir Noir Blanc Blanc Blanc

Soit 144 possibilités

x_i	$p(X = x_i)$
1	$\frac{2160}{5040} = \frac{3}{7}$
2	$\frac{1440}{5040} = \frac{2}{7}$
3	$\frac{864}{5040} = \frac{6}{35}$
4	$\frac{432}{5040} = \frac{3}{35}$
5	$\frac{144}{5040} = \frac{1}{35}$

2) $E(X) = 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{2}{7} + 3 \times \frac{6}{35} + 4 \times \frac{3}{35} + 5 \times \frac{1}{35} = 2$

En moyenne, le premier cheval blanc arrivera en 2ème position

ex 14

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient 8 boules blanches et n boules noires. Les boules sont indiscernables. Un joueur tire avec remise deux boules de l'urne. Il examine leur couleur. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 5 €, et pour chaque boule noire tirée, il perd 10 €.

On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur sur un tirage.

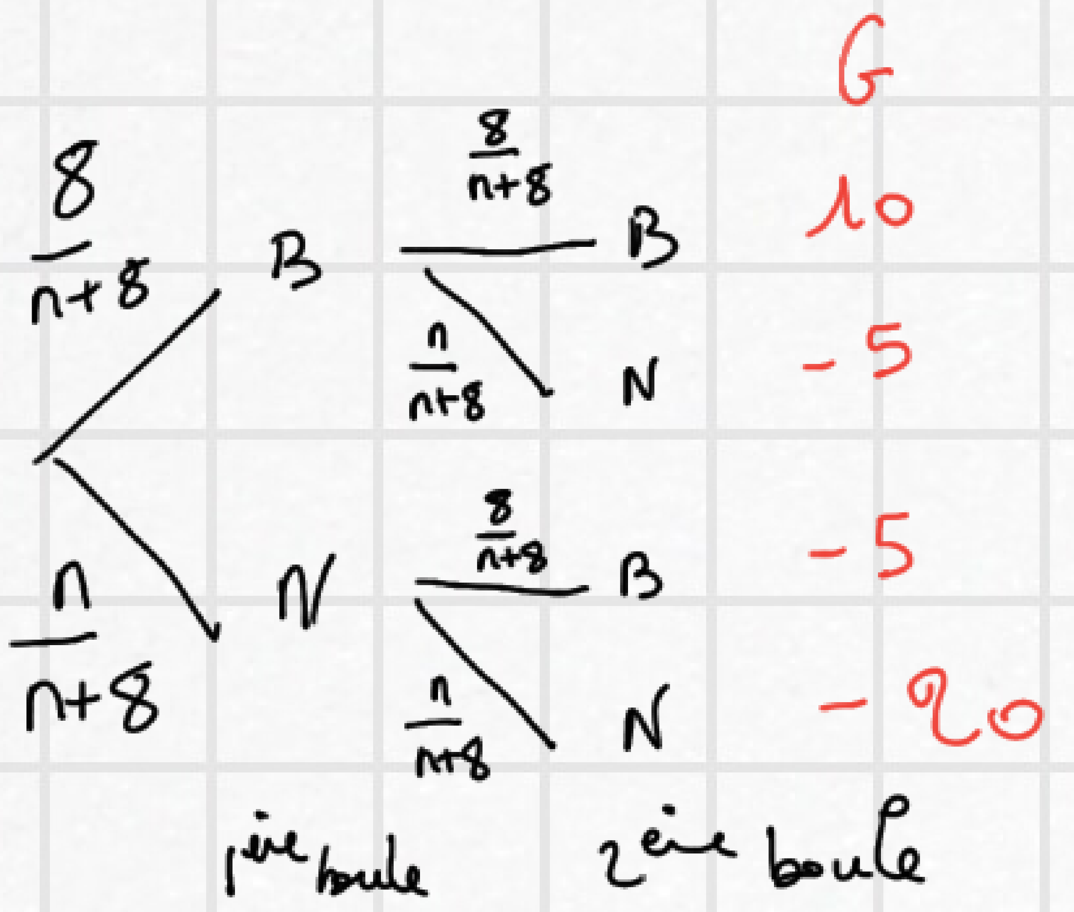
1. Définissez, en fonction de n, la loi de probabilité de G.

2. a) Exprimez, en fonction de n, l'espérance E(G).

b) Existe-t-il une valeur de n telle que le jeu soit équitable ?

1) Soit N l'évènement "Tirer une boule noire" et B l'évenement " Tirer une boule blanche".

on modelise l'expérience par l'arbre suivant.



$G \in \{-20\,;\,-5\,;\,-10\}$.

$$\begin{cases} p(G=-20) = \frac{n}{n+8} \times \frac{n}{n+8} = \frac{n^2}{(n+8)^2} \\ p(G=-5) = \frac{8}{n+8} \times \frac{n}{n+8} + \frac{n}{n+8} \times \frac{8}{n+8} \\ \qquad\qquad = \frac{16n}{(n+8)^2} \\ p(G=10) = \frac{8}{n+8} \times \frac{8}{n+8} = \frac{64}{(n+8)^2} \end{cases}$$

on a bien :

$$p(G=-20) + p(G=-5) + p(G=10) =$$
$$\frac{n^2}{(n+8)^2} + \frac{16n}{(n+8)^2} + \frac{64}{(n+8)^2} =$$
$$\frac{n^2+16n+64}{(n+8)^2} = \frac{(n+8)^2}{(n+8)^2} = 1$$

g_i	-20	-5	10
$p(G=g_i)$	$\frac{n^2}{(n+8)^2}$	$\frac{16n}{(n+8)^2}$	$\frac{64}{(n+8)^2}$

2a)

$$E(G) = \frac{-20n^2 - 80n + 640}{(n+8)^2}$$

2b) Le jeu est équitable si et seulement si $E(G)=0$

or $E(G)=0$ équivaut à

$-20n^2 - 80n + 640 = 0$

Cette équation admet 2 racines : 4 et -8.

L'une d'entre elles est un entier naturel, dont convient

Pour $n=4$, le jeu est équitable, soit une urne contenant 8 boules blanches et 4 boules noires.

ex 15 Une étude statistique menée lors des entraînements de la saison montre que, sur une série de 5 tirs au but, Pierre marque 5 buts avec une probabilité égale à 0,2, marque 4 buts avec une probabilité égale à 0,5 et 3 buts avec une probabilité égale à 0,3.
Aujourd'hui, Pierre effectue deux séries de 5 tirs au but. On admet que les résultats à chacune des deux séries sont indépendants.

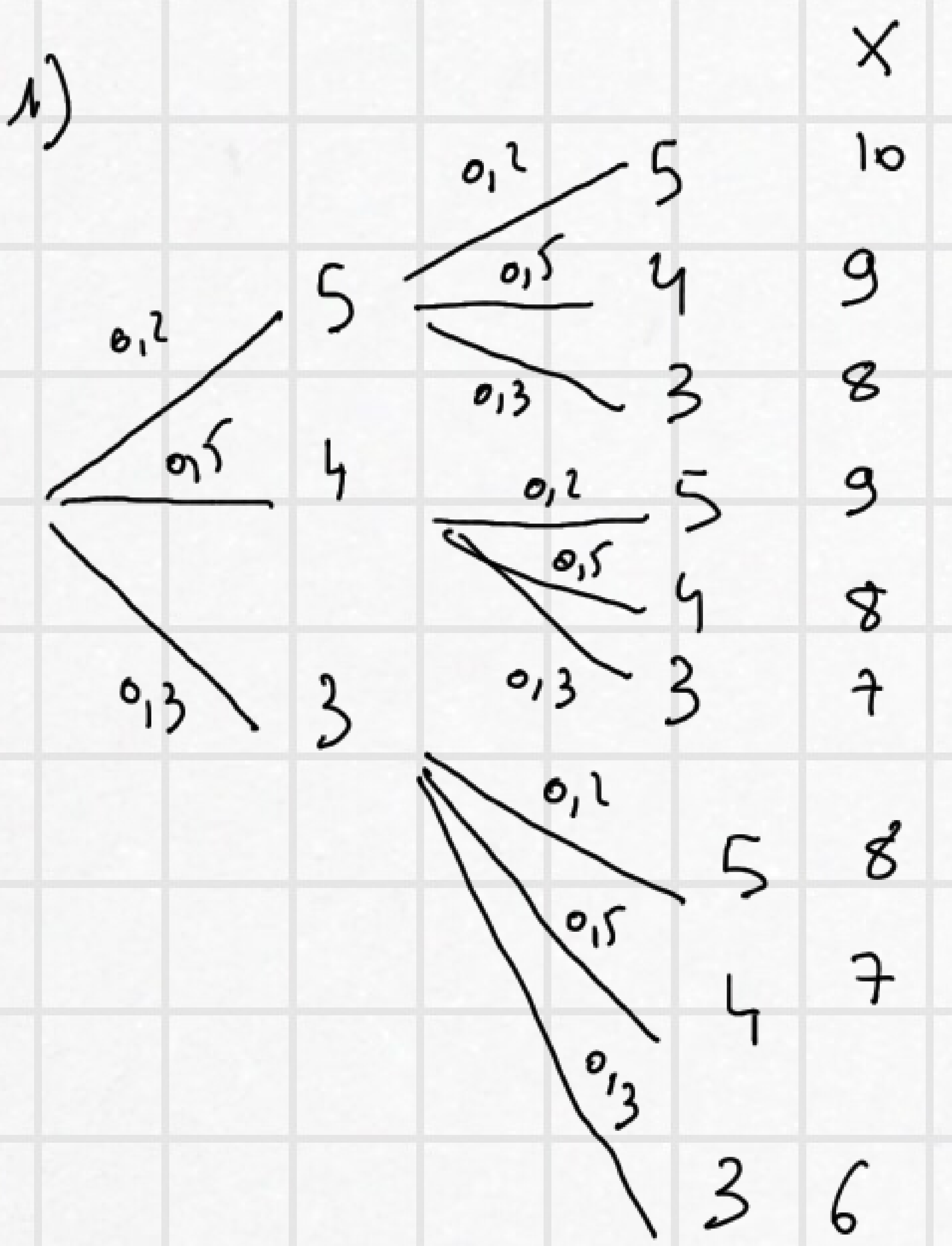
1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.

2. X est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre total de buts marqués au cours des deux séries.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance de X.

1)



2) a)

x_i	6	7	8	9	10
$p(X=x_i)$	0,09	0,15 + 0,15 = 0,3	0,06 + 0,25 + 0,06 = 0,37	0,1 + 0,1 = 0,2	0,04

b) $E(X) = 6\times 0{,}09 + 7\times 0{,}3 + 8\times 0{,}37 + 9\times 0{,}2 + 10\times 0{,}04$

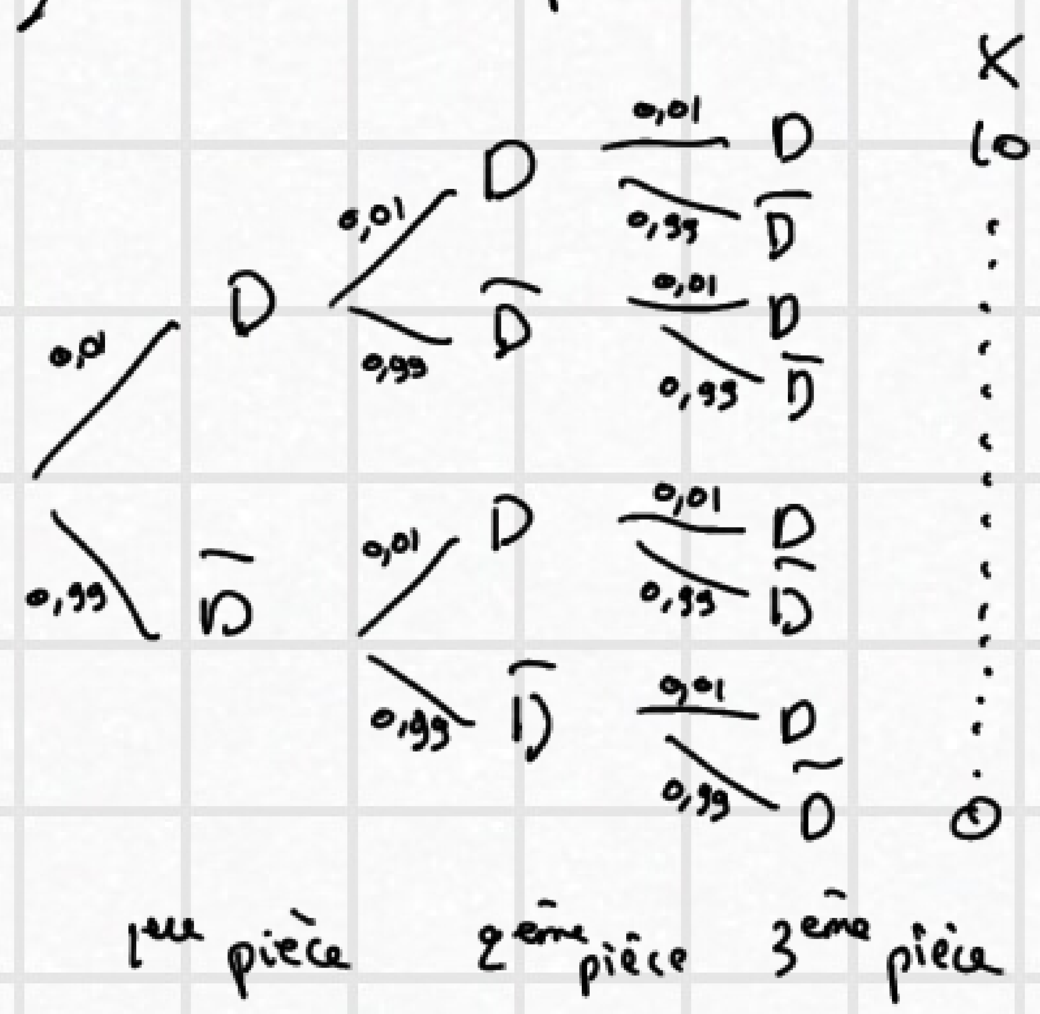
$E(X) = \underline{7{,}8}$

ex 16 Un magasin réceptionne un lot de pièces mécaniques. La probabilité qu'une pièce de ce lot soit défectueuse est égale à 0,01.
On vérifie 10 pièces du lot.

a) Calculer la probabilité qu'aucune des 10 pièces ne soit défectueuse (arrondir le résultat au millième).

b) En déduire la probabilité que l'une au moins des 10 pièces soit défectueuse.

a) D : La pièce est défectueuse



Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces défectueuses.

$$p(X=0) = \underbrace{0{,}99\times 0{,}99\times 0{,}99 \dots}_{10 \text{ fois}}$$

$$p(X=0) = 0{,}99^{10} \simeq \underline{0{,}904}$$

b) $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

$\simeq 1 - 0{,}904$

$\simeq \underline{0{,}096}$

ex21

Chaque jour d'école, Caroline choisit au hasard un bonbon chez l'épicier qui se trouve sur son chemin.
La boîte contient 60 % de bonbons à la fraise et 40 % au citron.
L'épicier veille à ce que ces proportions restent les mêmes chaque jour.
Durant ces quatre jours, calculer la probabilité que Caroline ait choisi :

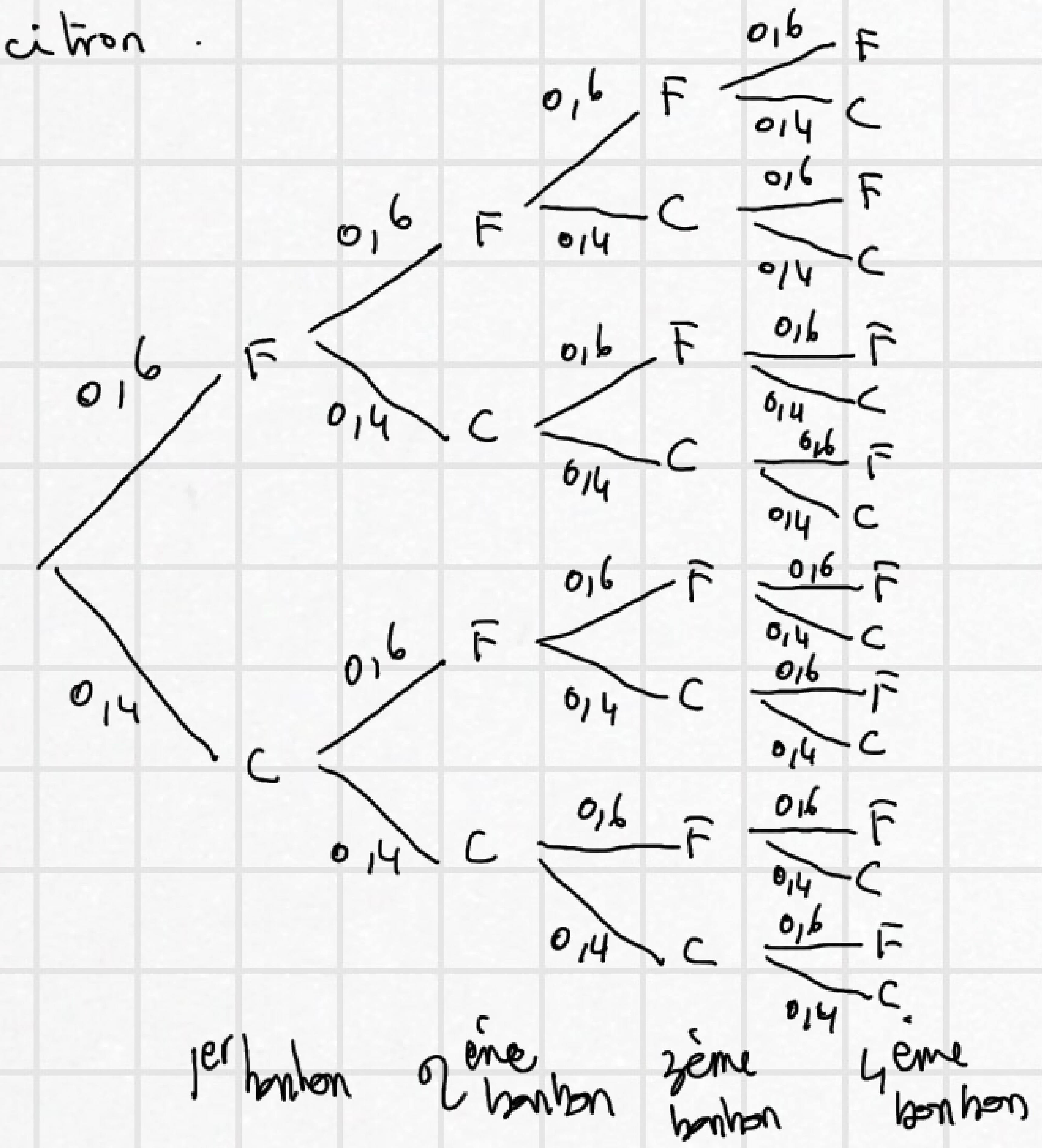
a) « Quatre bonbons du même parfum » ;

b) « Exactement deux bonbons à la fraise » ;

c) « Au moins un bonbon au citron ».

---

a) Soit F l'évènement choisir un bonbon à la fraise et C choisir un bonbon au citron.



A : 4 bonbons du même parfum

$p(A) = p(FFFF) + p(CCCC)$

$= 0{,}6^4 + 0{,}4^4$

$\simeq \underline{0{,}1552}$

b) B : "2 bonbons à la fraise"

Chaque évènement 2 bonbons à la fraise a une probabilité de

$\underbrace{0{,}6 \times 0{,}6}_{\text{2 bonbons fraise}} \times \underbrace{0{,}4 \times 0{,}4}_{\text{2 bonbons citron}} = \underline{0{,}0576}$

Il y a 6 évènements "2 bonbons à la fraise"

F F C C
F C F C
F C C F
C F F C
C F C F
C C F F

6

donc $p(B) = 6 \times 0{,}0576 = \underline{0{,}3456}$

c) L'évènement contraire de "au moins un bonbon au citron" est "aucun bonbon au citron".
De plus l'évènement "aucun bonbon au citron" est "quatre bonbons à la fraise"
$p(FFFF) = 0{,}6^4$ donc

$p(\text{"au moins un bonbon au citron"})$

$= 1 - p(FFFF)$

$= 1 - 0{,}6^4$

$\simeq \underline{0{,}8704}$

ex22

Une urne contient trois boules rouges, deux boules jaunes et une boule blanche.
On tire successivement, au hasard et avec remise, cinq boules de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

a) A : « Toutes les boules tirés sont rouges. »
b) B : « Les boules tirées sont d'une même couleur. »
c) C : «On obtient exactement trois boules rouges. »

a) $p(A) = \left(\frac{3}{5}\right)^5 \simeq \frac{243}{3125} \simeq 0{,}078$

b) $p(B) = \left(\frac{3}{5}\right)^5 + \left(\frac{2}{5}\right)^5 + \left(\frac{1}{5}\right)^5$

$= \frac{276}{3125} \simeq 0{,}089$

c) Nous avons les configurations suivantes :

$$\left.\begin{array}{ccccc}
R & R & R & \bar R & \bar R \\
R & R & \bar R & R & \bar R \\
R & R & \bar R & \bar R & R \\
R & \bar R & R & R & \bar R \\
R & \bar R & R & \bar R & R \\
R & \bar R & \bar R & R & R \\
\bar R & R & R & R & \bar R \\
\bar R & R & R & \bar R & R \\
\bar R & R & \bar R & R & R \\
\bar R & \bar R & R & R & R
\end{array}\right\} \text{10 configurations}$$

Et pour chaque configuration

$\bar R \bar R$ → JJ, JB, BJ, BB

donc

$$p(C) = 10 \times \left(\left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) \times 2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) \right)$$

$$p(C) = 10 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \right)$$

$$p(C) = \frac{378}{625} \simeq 0{,}6$$

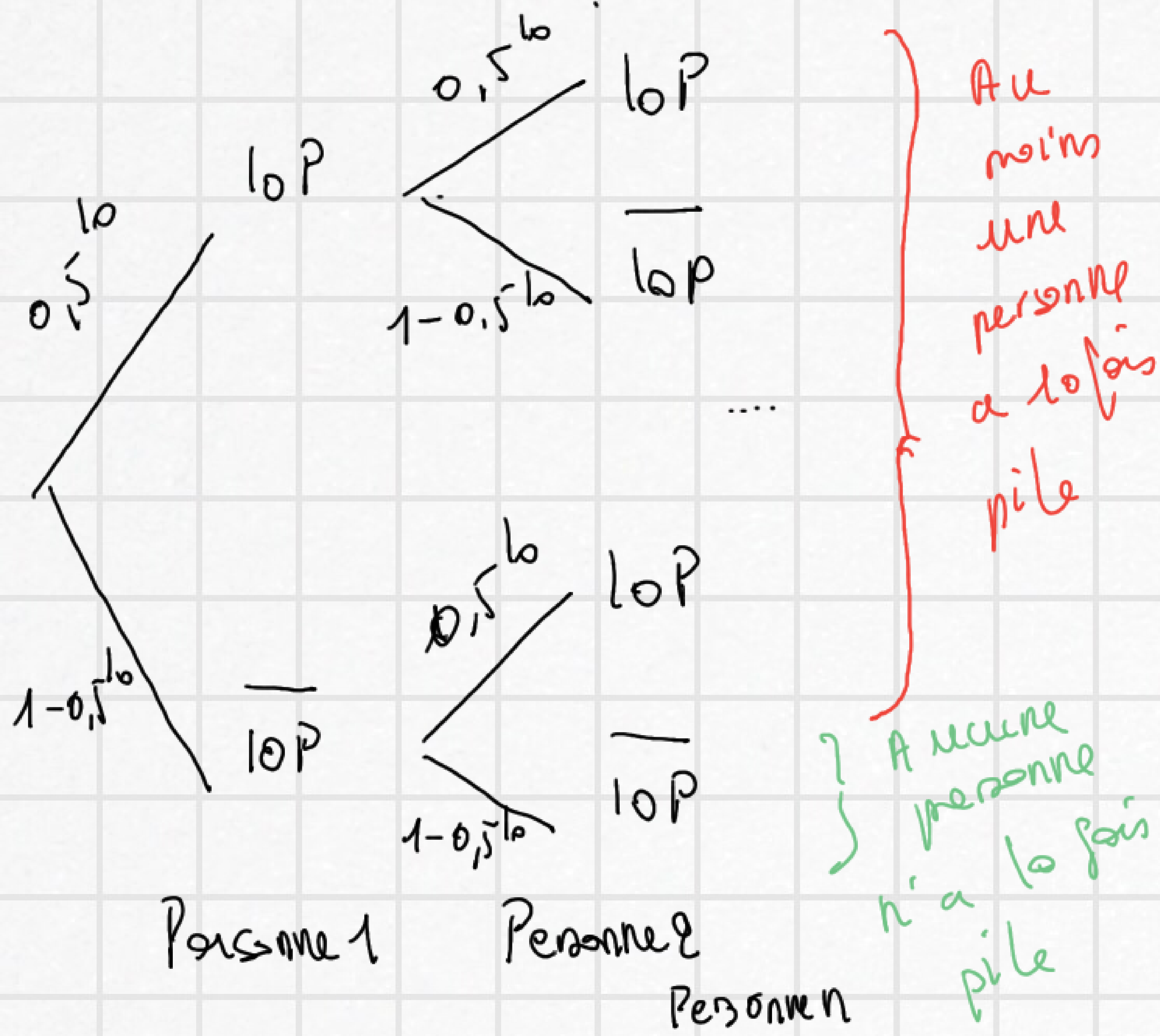
ex23

L'expérience consiste à lancer 10 fois de suite une pièce équilibrée.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 10 fois Pile ?
2. *n* personnes réalisent cette expérience (n entier, $n \geqslant 1$).
a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité que l'une au moins d'entre elles obtienne 10 fois Pile.
b) Combien faut-il au moins avoir de personnes, pour que la probabilité que l'une d'elles au moins obtienne 10 fois Pile soit supérieure à la probabilité qu'aucune n'obtienne 10 fois Pile ?

1) $p = 0{,}5^{10} \simeq 0{,}00098$

2a) L'évènement contraire de cet évènement est que toutes les personnes n'obtiennent pas 10 fois pile.



La probabilité cherchée est donc :

$$1-(1-0,5^{10})^n$$

b) On doit trouver n tel que :

$$1-(1-0,5^{10})^n \geqslant (1-0,5^{10})^n$$

$$1 \geqslant 2 \times (1-0,5^{10})^n$$

donc $(1-0,5^{10})^n \leqslant \frac{1}{2}$

En faisant un tableau de valeurs, on trouve :

$\underline{n \geqslant 710}$.