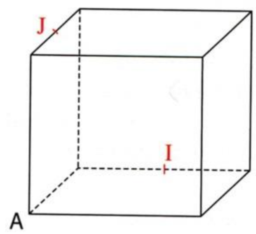
Problèmes ouverts, narrations de recherche, tâches complexes et créativité mathématique.

Fiche 10 - Il y a deux sortes d'esprits : celui de géométrie ~~(dans l'espace !)~~ et celui de finesse-Pascal

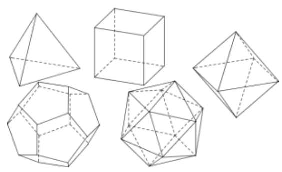
1)* **Une fuite ? Non trois…**



Une cuve cubique d'arête 80 cm est percée en trois endroits : le sommet A et les milieux I et J des deux arêtes signalées.

Dans cette cuve, peut-on verser 400 L de liquide sans fuite ? (Pensez à incliner la cuve !)

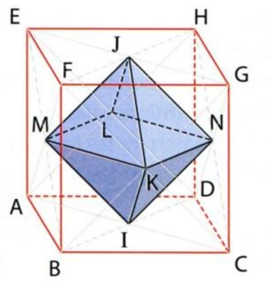
2) **Solides de Platon**



Se renseigner sur les solides de Platon.

On se propose d'étudier l'octaèdre.

ABCDEFGH d'arête l.



I, J, K, L, M, N sont les centres respectifs des carrés ABCD, EFGH, BCGF, AEHD, BFEA, CDHG.

Démontrer que les 12 arêtes du polyèdre IJKLMN sont de même longueur.

Démontrer que KLMN est un carré.

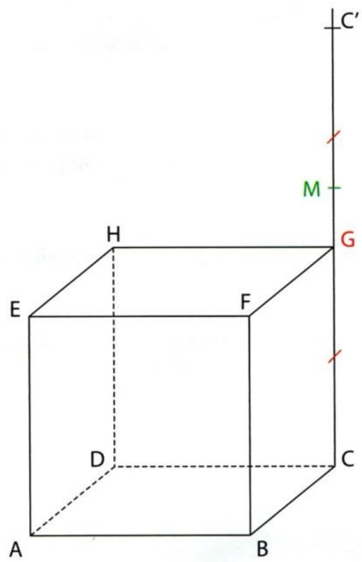
Démontrer que le volume de l'octaèdre IJKLMN est égal au sixième de celui du cube.

3)* **Polyèdre et tétraèdre**

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.

C' est le point de l'espace tel que G est le milieu du segment $[CC']$.

M est un point mobile sur la demi-droite $[GC')$.



Tracer la section du cube par le plan (DBM).

$\mathcal{P}$ est le polyèdre défini par l'intersection du cube et du tétraèdre $MCBD$.

x est la longueur GM et $V(x)$ est le volume du polyèdre $\mathcal{P}$.

On se propose de déterminer la valeur de GM afin que le volume du polyèdre $\mathcal{P}$ soit égal au tiers du volume du cube.

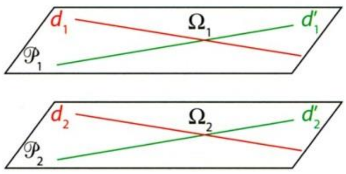
Calculer le volume V_1 du tétraèdre MCBD et en déduire que $v(x) = \frac{3x^2+3x+1}{6(x+1)^2}$ puis la position de M qui répond au problème posé.

3) **Absurde**

Le raisonnement par l'absurde consiste à prendre comme hypothèse la négation de la proposition à démontrer et à en déduire une contradiction.

On se propose d'utiliser le théorème du toit et un raisonnement par l'absurde pour démontrer la propriété :
« Si un plan $\mathcal{P}_1$ contient deux droites sécantes parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}_2$, alors $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

Démonstration



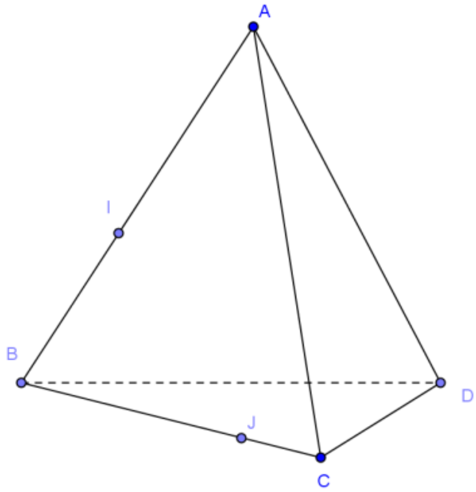
$d_1$et d_1' sont des droites sécantes en Ω_1 contenues dans le plan $\mathcal{P}_1$.
$d_2$et d_2' sont des droites sécantes en Ω_2 contenues dans le plan $\mathcal{P}_2$.
$d_1$et d_2 sont parallèles ainsi que d_1' et d_2'.
On se propose de démontrer que $\mathcal{P}_1$.et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.
Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que **$\mathcal{P}_1$.et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite Δ**, et on utilise le théorème du toit.

Justifier que Δ et d_1 sont parallèles.
Conclure.

Application
ABCD est un tétraèdre.
I,J,K sont les centres de gravité respectifs des faces ABC, ACD, ADB.

Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.
En déduire la section du tétraèdre ABCD par le plan (IJK).

4)* **(Inter) Sections… en avant !**

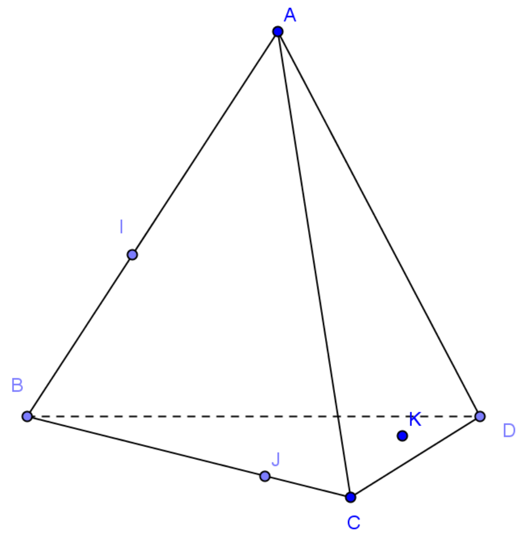


I est un point du segment [AB]
J est un point du segment [BC]
Déterminer l'intersection de la droite (IJ) avec chacun des plans contenant les faces du tétraèdre.

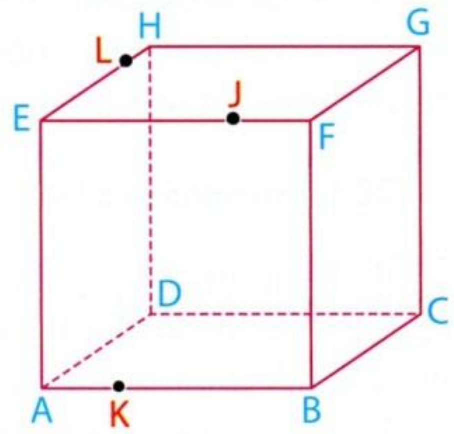
K est un point de la face BCD.

Construire la section du tétraèdre par le plan (AJK).

Construire la section du tétraèdre par le plan (AIK).



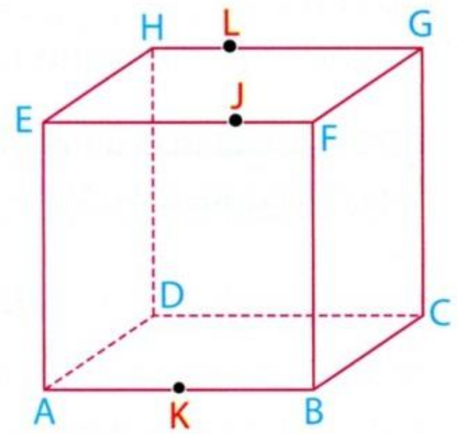
ABCDEFGH est un cube et, I,J,K sont des points des arêtes de ce cube. Construire la section de chaque cube avec le plan (IJK).



$HL = \frac{1}{4}HE$

$EJ = \frac{3}{4}EF$

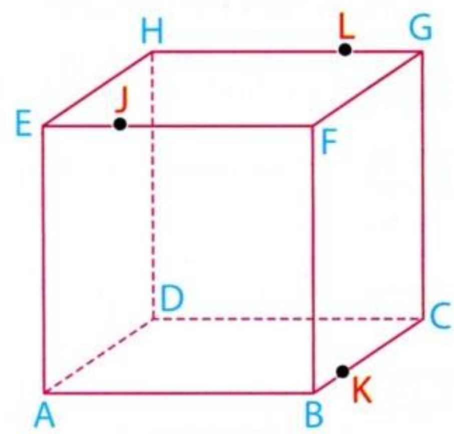
$AK = \frac{1}{4}AB.$



$HL = \frac{1}{4}HG$

$EJ = \frac{3}{4}EF$

K est le milieu de $[AB]$

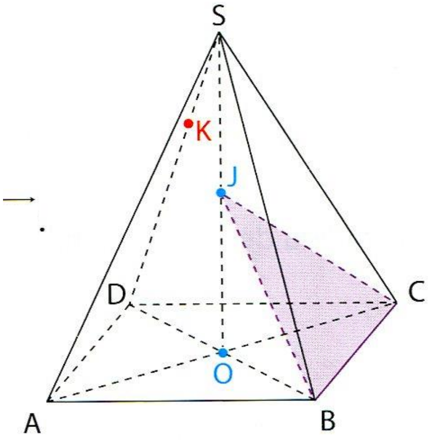


$EJ = \frac{1}{4}EF$

$BK = \frac{1}{4}BC$

$HL = \frac{3}{4}HG$

5)* SABCD est une pyramide à base carrée ABCD. Le point O est le centre de ABCD. J est le milieu de [SO]. Le point K est tel que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.



a) Justifier que S, B, O, J et K sont coplanaires.

b) Démontrer que $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$

Justifier que $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}\right)$ et en déduire que $\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SD}$ puis que B,J et K sont alignés.

c) Etudier la position relative de (BJC° avec (ABC), et avec (SCD).

Etudier la position relative des plans (BJC) et (SAD).

Construire la section de la pyramide SABCD par le plan (BJC).