Problèmes ouverts, narrations de recherche, tâches complexes et créativité mathématique.

Primitif les primitives ? C'est intégralement faux!

1) **Post-Bac**

Pour tout nombre entier naturel n, on définit la fonction f_n par la relation suivante, valable pour tout nombre réel x :

Pour $n \geq 1$, $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$

$f_0(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

Vérifier que pour tout nombre réel x : $\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$

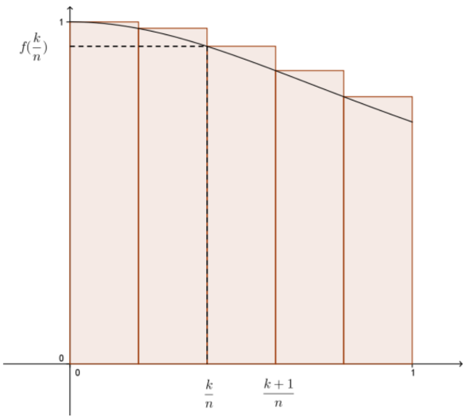
Calculer la dérivée de la fonction qui à tout nombre réel x associe $\ln(1+e^x)$, et en déduire la valeur de u_0.

Montrer que $u_0 + u_1 = 1$ et en déduire la valeur de u_1.

Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente. On note l sa limite.

Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n + u_{n-1} = \frac{1}{n-1}(1 - e^{-n+1})$ et en déduire la valeur de l.

2) **Algorithmique**



f est la fonction définie sur l'intervalle [0 ;1] par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On subdivise l'intervalle [0 ;1] en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ (n$\in \mathbb{N}^*$) et sur chaque intervalle $[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}]$ (avec $0 \leq k \leq n-1$) on construit les rectangles de hauteur $f(\frac{k}{n})$.

On note S_n la somme des aires de ces rectangles et on admet que $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe et vaut $l = \int_0^1 f(x)dx$.

Voici un algorithme complet permettant de déterminer une valeur approchée par excès de l.

Compléter l'algorithme.

On saisit la valeur N=5. Quelle valeur obtiendra-t-on en sortie ?

Vérifier que la fonction $F: x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ est une primitive sur [0 ;1] de f.

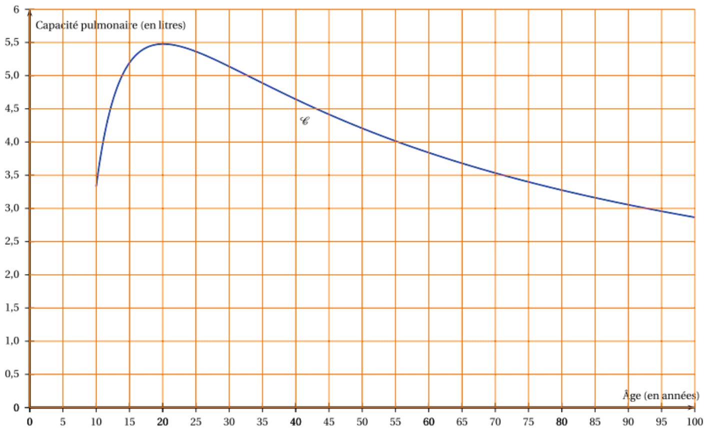
Calculer la valeur exacte de l.

Programmer cet algorithme.

Choisir une autre valeur de N supérieure à 5 et donner la valeur renvoyée par l'algorithme

Entrée
Saisir N (N∈N*)
Initialisations
X prend la valeur 0
S prend la valeur 0
H prend la valeur $\frac{1}{N}$
Traitement
Pour k de 0 jusqu'à N-1
    S prend la valeur S+…
    X prend la valeur X+…
FinPour
S prend la valeur S×…
Sortie
Afficher S

3) **Capacité pulmonaire**



La capacité pulmonaire d'une personne est la quantité d'air (mesurée en litres) pouvant être inspirée.
Dans le cas d'une inspiration forcée, à partir de 10 ans, la capacité pulmonaire (en litres) d'une personne peut être modélisée en fonction de son âge x (en années) par la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$$

A quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ?
Calculer la dérivée de la fonction F définie sur]0 ;+∞[par $F(x) = (\ln x)^2$.
Déterminer la valeur moyenne de la capacité pulmonaire d'un patient sain de 20 à 70 ans, à 0,1 L près par défaut.

4) **Une suite d'intégrales.**

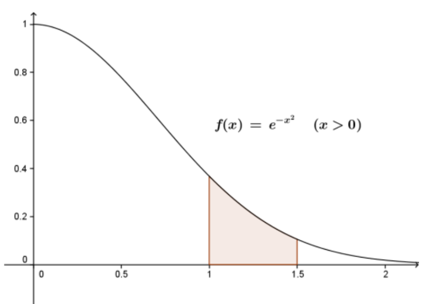
On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$ représenté par la courbe $\mathcal{C}_n$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On a tracé les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.
On pose pour tout $\in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.
Emettre des conjectures sur la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et les démontrer.

5) **La constante d'Euler – vers le Supérieur.**

140 p 229

La constante d'Euler-Mascheroni, ou constante d'Euler, est une constante mathématique, utilisée principalement en théorie des nombres, définie comme la limite de la différence entre la série harmonique et le logarithme naturel.
La série harmonique $S_n = 1 + \frac{1}{2} + .. + \frac{1}{n}$ diverge très lentement vers $+\infty$ et en fait aussi lentement que $\ln n$.
On montre dans ce problème que la limite de la différence $S_n - \ln n$ converge vers cette constante éponyme γ qui vaut environ 0,58.

6) **Fonction définie par une intégrale.**



Soit F la fonction f définie sur [0 ;+∞[par $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ où f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^{-x^2}$ représentée ci-contre.

Déterminer le sens de variation de F sur $[0;+\infty[$.
Utiliser une calculatrice ou un logiciel pour donner des valeurs approchées des nombres $F(2), F(10), F(0{,}5)$ et $F(x_0)$ avec x_0 de votre choix.
Interpréter graphiquement l'un de ces résultats.

8) **Longueur et flèche d'une chaînette**.

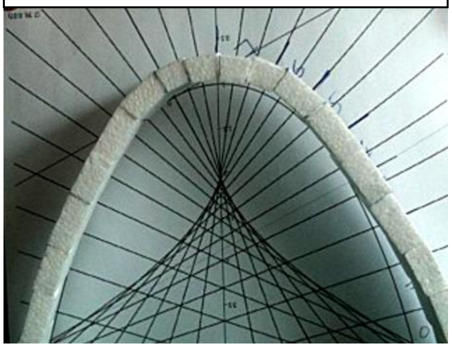
http://photos.blogs.liberation.fr/vosphotos/photo-fiction/

La chaînette est la forme prise par un fil pesant flexible infiniment mince homogène, inextensible suspendu entre deux points, placé dans un champ de pesanteur uniforme. Sa courbe représentative a été étudiée par Gottfried Leibniz, Jean Bernouilli et Christian Huygens en 1691. L'architecte catalan Antoni Gaudi l'a beaucoup utilisé dans ses constructions.

On laisse pendre un fil d'une longueur de 4 m entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 m.
On montre et on admettrra que rapporté à un repère orthonormal convenable, la chaînette a pour équation :

$$y = f_\beta(x) = \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2\beta}$$

où β est un paramètre réel positif dépendant de la longueur du fil. On note $\mathcal{C}_\beta$ la courbe représentative de f_β.



http://notretipesurlesvoutedelasf.over-blog.com/article-les-arcs-en-chainette-de-la-sagrada-familia-86185473.html

Le but du problème est de calculer une valeur approchée de la flâche prise par le fil, c'est-à-dire de l'écart de hauteur entre le point le plus bas et celui le plus haut.

Soit un réel $\beta > 0$.

Déterminer les limites de f_β en $+\infty$ et $-\infty$ puis étudier les variation de f_β sur $\mathbb{R}$. Tracer les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et l'une de votre choix.

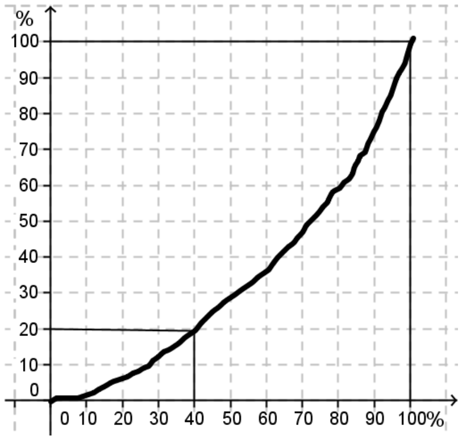
On admet, dans le cas d'une fonction f dérivable sur un intervalle $[a;b]$, que la longueur de la courbe d'équation $y = f(x)$ entre les points d'abscisses respectives a et b est donnée par :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx \ (E)$$

Faire un schéma de la situation en prenant l'axe de symétrie de la chaînette comme axe des ordonnées et remplacer les valeurs numériques du problème dans (E). Quelle équation (E').obtient-on ?
Montrer qu'il existe un unique réel β_0 solution de (E').
Donner une valeur approchée de β_0 à 10^{-2} près.
Déterminer les coordonnées du minimum de la fonction f_{β_0} . En déduire la flèche du fil.

9) **Courbes de Lorenz, indice de Gini.**

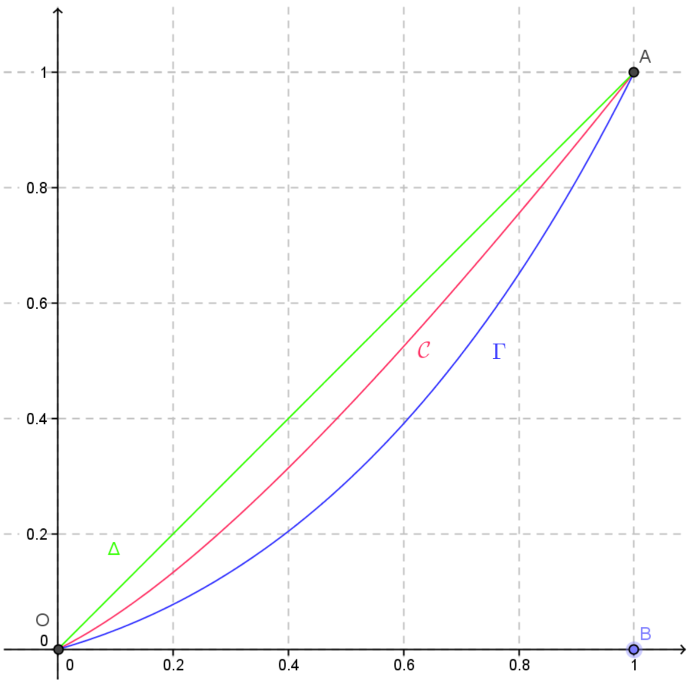
On s'interesse à la répartition des surfaces agricoles de différents pays en fonction de la taille de ces exploitations (on parle de **courbes de Lorenz**).
On peut donc se poser des questions du type :
Quelle superficie revient aux 40% les plus petites ?
Lorenz a eu l'idée de représenter cette répartition par une courbe.
Par exemple si l'on exprime les proportions en pourcentages, on obtient un représentation graphique telle que donnée ci-dessous :



Donner dans ce cas la réponse à la question posée précédemment.
Quelle serait la courbe associée à un pays dans lequel toutes les exploitations agricoles auraient la même taille ?
Sur un même graphique, faire apparaitre la courbe représentative d'un pays dans lequel il y a beaucoup de petites exploitations et d'un pays dans lequel il y en a peu.
Expliquer pourquoi une courbe de Lorenz :

- ✓ Passe toujours par l'origine du repère et le point de coordonnées (100 ;100).
- ✓ Est toujours située au dessous de la droité d'équation y=x.
- ✓ Représente toujours une fonction croissante.

On définit maintenant deux fonctions f et g sur [0,1] et non plus sur [0,100] représentées respectivement par les courbes $\mathcal{C}$ et Γ.
$f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{x+1}-1$ et $g(x)=e^x-(e-2)x-1$.
Ces deux fonctions illustrent la répartition des surfaces agricoles de deux pays F et G en fonction de de la répartition de la taille des exploitations. Par exemple, on lit $g(0{,}3)\approx 0{,}13$ ce qui signifie que dans le pays G, 30% des exploitations les plus petites couvrent 13% du territoire.



On appelle **indice de Gini** γ le quotient de l'aire comprise entre la courbe de Lorenz et Δ :y=x, par l'aire du triangle OAB.
Quelle est la valeur maximale et minimale prise par l'indice de Gini ?
Quel lien peut-on faire entre l'indice de Gini et la répartition de la surface agricole ?
Calculer les deux indices de Gini associés au deux répartitions.

Supposons maintenant que l'indice de Gini soit associé à la répartition des salaires dans une entreprise. A quel type d'entreprise correspond un indice de Gini faible ? fort ? Donner des exemples de telles entreprises.

10) **Avec des fonctions trigonométriques**.

Soit la suite (I_n) définie pour $n \geq 0$ par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$$

Après avoir simplifié la différence $I_{n+2} - I_n$, la calculer en fonction de n.
Calculer I_1 et en déduire I_3 et I_4.
Calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\tan\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$.
En déduire I_0puis I_2 et I_4.

11) **Une technique d'intégration efficace : l'intégration par parties.**

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, de dérivées continues sur I.
Expliquer la formule de l'intégration par parties pour tous réels a et b de I:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

En choisissant correctement les fonctions u et v, calculer $I = \int_0^1 xe^x dx$ et $J = \int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$.
Il est aussi possible de calculer la primitive définie sur [1 ;+∞[qui s'annule en 1 de la fonction ln. Pour cela il suffit de calculer : $\int_1^x \ln t\, dt$ et cela se fait aussi par parties !
On peut faire une double intégration par parties en répétant l'opération comme c'est le cas par exemple pour calculer $K = \int_0^1 x^2 e^x dx$.