Les nombres complexes

Contenu

1) INTRODUCTIONS 2

A) Un nouvel ensemble de nombres 2

B) Une approche historique 2

2) LA NOTION DE NOMBRE COMPLEXE 5

A) La forme algébrique d'un nombre complexe 5

B) Conjugué d'un nombre complexe 7

3) EQUATION DU SECOND DEGRE A COEFFICIENTS REELS 7

4) REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE 8

A) Affixe d'un point 8

B) Affixe d'un vecteur 9

5) FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL 10

A) Module d'un nombre complexe 10

B) Arguments d'un nombre complexe 11

C) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul 13

D) Interprétation géométrique du module de l'argument 14

6) LA NOTATION EXPONENTIELLE 14

A) La fonction $\boldsymbol{\theta \longmapsto \cos\theta + i\sin\theta}$ 14

B) La notation exponentielle de la forme trigonométrique 15

1) INTRODUCTIONS

A) Un nouvel ensemble de nombres

$$\delta_i^j = \delta_i \cdot \delta^j$$

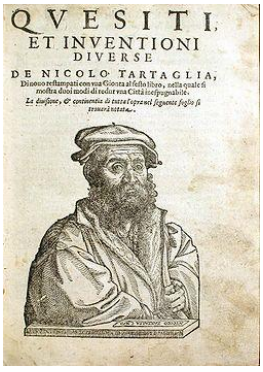
« Dieu a fait les nombres entiers; tout le reste est invention humaine »" est une citation très connue de Kronecker. Cet ensemble de nombre a été nommé $\mathbb{N}$

L'équation $x+1=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$. Elle en admet dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
L'équation $2x+1=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$. Elle en admet dans l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux (nombres ayant un nombre fini de décimales non nulles).
L'équation $3x+1=0$ n'admet pas de solution dans . Elle en admet dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels (nombres quotients de nombres entiers dont les décimales sont périodiques).
L'équation $x^2-2=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$. Elle en admet dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels (nombres dont les décimales ne sont pas nécessairement périodiques).
L'équation $x^2+1=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. Elle en admet dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes (nombres de la forme $a+ib$ avec a et b réels tels que $i^2=-1$).

Attention à ne pas considérer ces ensembles en terme de nombre de nombres et qu'ils seraient de plus en plus grands…
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ contiennent autant de nombres!
De même $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ en contiennent autant. Pour s'en convaincre c'est ici .

B) Une approche historique

Dans son Triparty rédigé en 1484, Nicolas Chuquet tentant de trouver un nombre dont le triple égale son carré plus 4 découvrit que sa méthode donnait pour solutions $1.5+\sqrt{-1.75}$ et $1.5-\sqrt{-1.75}$.
Chuquet conclut alors qu'il n'existe pas de nombre dont le triple égale son carré plus 4, car les solutions ci-dessus sont, dit-il, "impossibles". Nous ne sommes pas loin de la découverte des **nombres complexes** (nommés ainsi par Gauss)... qui fera le succès de quelques algébristes italiens du XVI^{ème} siècle.



C'est Descartes au XVIIème siècle qui introduit l'appellation « **nombres imaginaires** ».
Euler déclara au début du XVIII^{ème} siècle que l'utilisation de l'écriture $\sqrt{-1}$ est absurde puisqu'elle aboutit à la contradiction suivante : $(\sqrt{-1})^2=-1$ et $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)^2}=1$. Il introduisit en 1777 la notation i désignant $i^2=-1$.

L'accouchement des nombres complexes commença par une guerre de légitimité (voir p 232 du manuel) concernant la découverte d'une méthode de résolution des équations du troisième degré. Entrent en scène Del Ferro, Tartaglia et Cardan. La postérité gardera le dernier nom.

Résolution d'une équation du troisième degré avec la méthode de « Cardan/Tartaglia/Del Ferro » :

$$(E)\ \ x^3 = 15x + 4$$

Il faut tout d'abord effectuer le changement de variable $x = a + b$ qui transforme (E) en $a^3 + b^3 + 3(a + b)(ab - 5) - 4 = 0$

L'idée géniale est d'imposer la condition $ab = 5$.

On effectue ensuite un changement de variable $A = a^3$ et $B = b^3$. Les nombres A et B sont donc solution du système :

$$\begin{cases} AB = 125 \\ A + B = 4 \end{cases}$$

La résolution de ce système amène à une équation du second degré… dont le discriminant est négatif! Impossible de poursuivre sauf si l'on se permet d'écrire que $A = 2 + \sqrt{-121}$ et $B = 2 - \sqrt{-121}$.

C'est ce que fit Bombelli!

Adoptons la notation ultérieure d'Euler pour poursuivre : $(11i)^2 = -121$. On a ainsi $A = 2 + 11i$ et $B = 2 - 11i$.

On remarque que $A = (2 + i)^3$ et $B = (2 - i)^3$.

Ainsi puisque $A = a^3$ et $B = b^3$, $a = 2 + i$ et $b = 2 - i$.

Et puisque $x = a + b$, on trouve $x = 4$, l'une des racines de l'équation initiale.

On peut donc écrire que $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + \alpha x + 1)$

Une identification permet de trouver α=4.

On termine la résolution de l'équation avec le calcul du discriminant de du trinôme du second degré.

Les trois solutions de l'équation (E) sont : $-\sqrt{3} - 2$, $\sqrt{3} - 2$, 4.

C'est en poésie que fût présentée méthode de résolution par Cardan dans Ars Magna :

Quando che'l cubo con le cose appresso
Se agguaglia a qualche numéro discrète :
Trovati dui altri différent! in esso.
Dapoi terrai, questo per consueto,
Che'l loro produtto, sempre sia eguale
Al terzo cubo délie cose netto ;
El residuo poi suo générale,

Delli lor lati cubi, ben sottratti
Varrà la tua cosa principale.
In el secondo, de cotesti atti ;
Quando che'l cubo restasse lui solo,
Tu osserverai quest' altri contratti,
Del numer farai due, tal part'a volo,
Che l'una, m l'altra, si produca schietto,
El terzo cubo délie cose in stolo ;
Délie quai poi, per commun precetto,
Torrai h lati cubi, insieme gionti,
Et cotai somma, sarà il tuo concetto ;
El terzo, poi de questi nostri conti,
Se solve col secondo, se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.
Questi trovai, et non con passi tardi
Nel mille cmquecent'e quattro e trenta ;
Con fondamenti ben saldi e gaghardi
Nella Città del mar intorno centa.

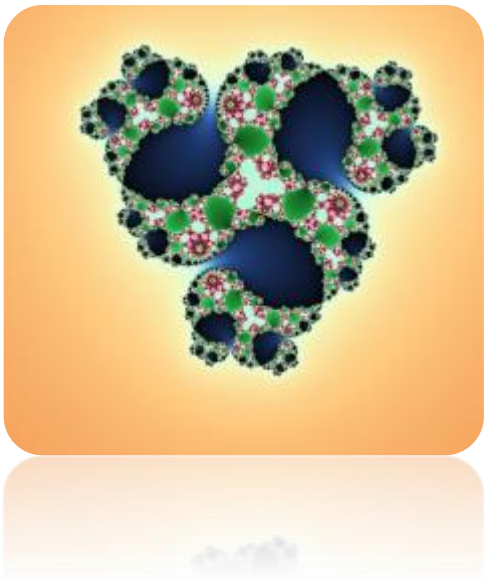
Impressionnant n'est-ce pas ?

Et la fin du poème ressemble à ça:

Je trouvai tout ceci, et sans m'attarder
En l'an mil cinq cent trente-quatre;
Sur des fondements solides et inébranlables
Dans la Cité tout entière ceinte par la mer.

En 1811 (donc bien plus tard), Gauss écrit dans un courrier : « De même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles par moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se figurer le domaine complet de toutes les quantités réelles et imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où chaque point, déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente en même temps la quantité $a+ib$.

Jean-Robert Argand avait eu avant lui (en 1806), cette idée ingénieuse de représenter géométriquement les nombres complexes, mais c'est la notoriété de Gauss qui permis à cette « drôle d'idée » de s'installer dans le camp des mathématiciens.. Les fractales naitront de cet univers, dont Douady et Mandelbrot sont les découvreurs les plus connus (voir Dimensions et les fractales expliquées aux non matheux).



2) LA NOTION DE NOMBRE COMPLEXE

A) La forme algebrique d'un nombre complexe

1) L'ensemble des nombres complexes

Théorème: Il existe un ensemble de nombres appelé $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes ayant les propriétés suivantes :

1) $\mathbb{C}$ contient tous les réels.

2) L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul sont identiques.

3) $\mathbb{C}$ contient le nombre i tel que $i^2 = -1$.

4) Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux réels.

Remarque

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\subset$ est le symbole d'inclusion

Définition:

L'écriture $z = a + ib$ où a et b sont deux réels.est appelée **la forme algébrique** du nombre z.

a est la partie réelle de z, elle est notée $\mathrm{Re}(z)$.

b est la partie imaginaire de z, elle est notée $\mathrm{Im}(z)$.

Remarques et vocabulaire :

- Les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe sont des nombres réels.
- $\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z$ réel et $\text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z$ imaginaire pur .

Propriété: Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si , ils ont même partie réelle et imaginaire.

Cas particulier:

- Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

2) Calculs dans $\mathbb{C}$

$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont les formes algébriques de deux nombres complexes

- **Somme** : $z + z' = a + ib + a' + ib' = (a + a') + i(b + b')$

La partie réelle de la somme est la somme des parties réelles.
La partie imaginaire de la somme est la somme des parties imaginaires.

- **Produit** : $z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

- **Identités remarquables** :

$$(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + i(2ab)$$
$$(a - ib)^2 = a^2 - b^2 + i(-2ab)$$

$$\boxed{(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2}$$

Cette dernière identité remarquable est fondamentale. Nous allons voir que $a - ib$ est appelé le conjugué de $a + ib$.
Ce produit permet d'obtenir un réel strictement positif. Cette transformation est utilisée pour déterminer la forme algébrique d'un quotient de deux nombres complexes.

- **Quotient** : $z' \neq 0$

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{(aa' + bb') + i(-ab' + a'b)}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i\frac{-ab' + a'b}{a'^2 + b'^2}$$

  - **Exemple** : $\frac{3+2i}{2-3i} = \frac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{0+13i}{13} = i$

B) Conjugue d'un nombre complexe

Définition:
Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$ où a et b sont deux réels.est le nombre complexe $a - ib$. On le note $\bar{z}$.

Exemple : $\overline{4 + 2\imath} = 4 - 2i$

Remarque : $\bar{\bar{z}} = z$

Propriétés: z et z' sont deux nombres complexes.

- z est réel équivaut à $\bar{z} = z$.
- z est imaginaire pur équivaut à $\bar{z} = -z$.
- $z + \bar{z} = 2Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2iIm(z)$

Propriété fondamentale: Si $z = a + ib$ avec a et b réels,
alors : $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

Propriétés opératoires: z et z' sont deux nombres complexes et n un entier naturel non nul.
$\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$ $\quad\quad$ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$ $\quad\quad$ $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$

Les démonstrations se font en utilisant les formes algébriques.

Exemple du produit :

$\overline{z \times z'} = \overline{(a + \imath b)(a' + \imath b')} = \overline{(aa' - bb') + \imath(ab' + a'b)} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$ =
$\bar{z} \times \overline{z'} = \overline{(a + \imath b)} \times \overline{(a' + \imath b')} = (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$
D'où l'égalité : $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$

3) EQUATION DU SECOND DEGRE A COEFFICIENTS REELS

Théorème: Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2+bz+c=0$, où $a\neq 0$, b et c sont trois réels admet exactement deux solutions (qui peuvent être confondues).

On note Δ, le discriminant de l'équation. $\Delta = b^2-4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double : $z_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes distinctes : $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Conséquence : Dans $\mathbb{C}$, tout trinôme du second degré az^2+bz+c se factorise .

Si $\Delta = 0$, $az^2+bz+c = a(z-z_0)^2$, d'où le nom de solution double.

Si $\Delta \neq 0$, $az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$

Démonstration :

Elle poursuit celle de Première S. Lorsque $\Delta < 0$, on écrit $\Delta = -(-\Delta)$ avec $-\Delta > 0$ et par conséquent :

$$\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$$

On effectue de même la factorisation.

4) REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

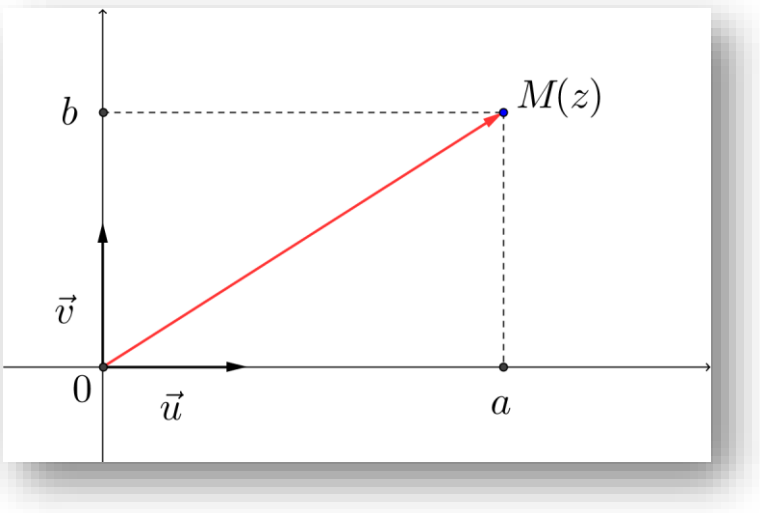
A) Affixe d'un point

Définition:

$(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan.

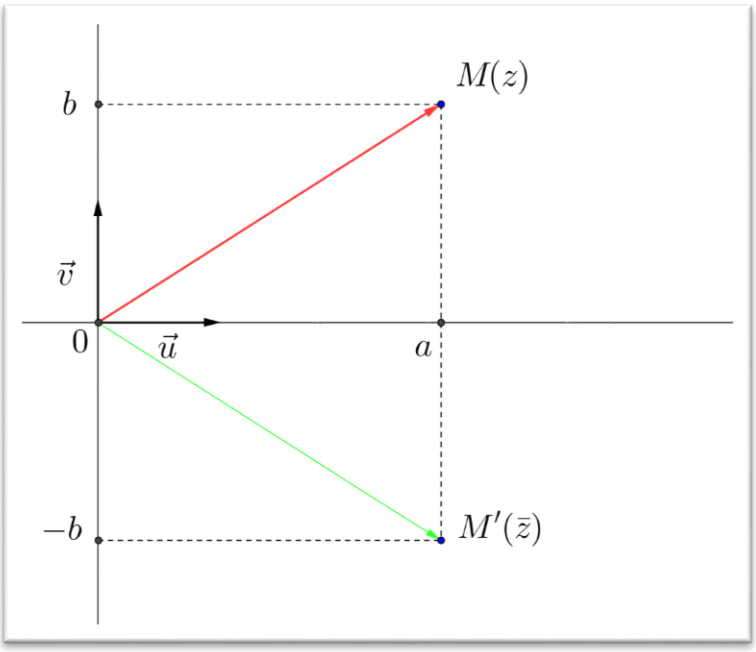
A tout nombre complexe $z=a+ib$, avec a et b réels, on associe le point M de coordonnées $(a\,;b)$. On dit que M est **le point image** du nombre complexe z. On dit que z est **l'affixe** du point M.

Tout point $M(a;b)$ est le point image d'un unique complexe $z=a+ib$



Remarques :

- La partie réelle de z est l'abscisse de M.
- La partie imaginaire de z est l'ordonnée de M.
- Les nombres réels sont les affixes de points de l'axe des abscisses. Cet axe est appelé axe réel.
- Les imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées. Cet axe est appelé axe imaginaire pur.
- Le point $M'(\bar{z})$ est le symétrique du point $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses.



B) Affixe d'un vecteur

Définition:
$(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan.
A tout nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, on associe le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées $(a\,;b)$. On dit que $\overrightarrow{OM}$ est **le vecteur image** du nombre complexe z. On dit que z est **l'affixe** du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Théorème: Si z_M et $z_{M'}$ sont les affixes respectives de deux points M et M' dans un repère orthonormé, alors **l'affixe du vecteur** $\overrightarrow{MM'}$ est égale à $\boldsymbol{z_{M'} - z_M}$.

Démonstration :

Supposons que : $z_M = a + ib$ et $z_{M'} = a' + ib'$.
Les coordonnées respectives de M et de M' sont donc : $(a\,;b)$ et $(a'\,;b')$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sont alors $(a'-a\,;b'-b)$.
L'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est donc $(a'-a)+i(b'-b) = z_{M'} - z_M$

Calculs avec les affixes :

- Soit $\vec{w}$ d'affixe z et $\overrightarrow{w'}$ d'affixe z'.
  - $\vec{w} = \overrightarrow{w'}$ équivaut à $z = z'$.
  - $\vec{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z + z'$.
  - $\lambda\vec{w}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ a pour affixe λz.

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leur affixe sont égales

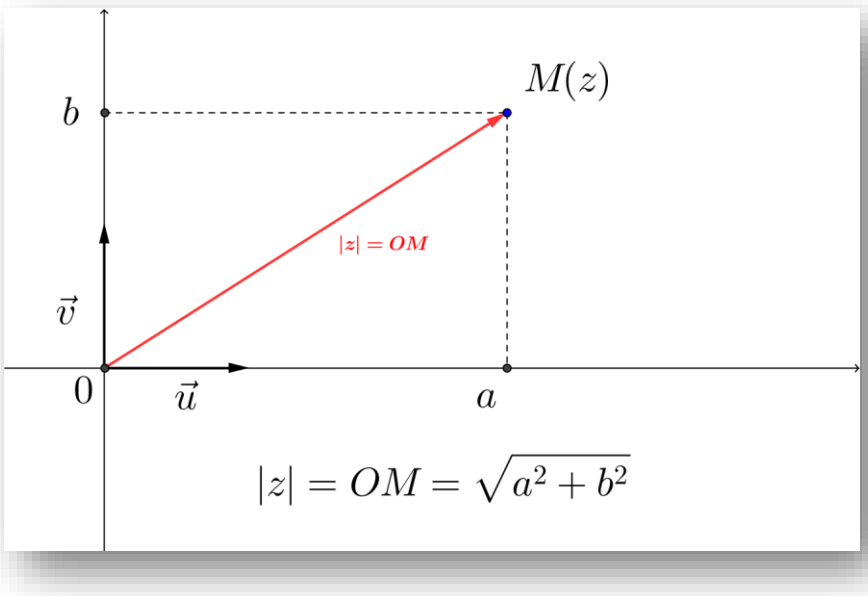
- Soit A d'affixe z_A et B d'affixe z_B.

Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

La démonstration se fait en passant aux affixes la relation $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$ qui s'écrit $2(z_I - z_A) = z_B - z_A$ et donne le résultat en isolant z_I.

5) FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

A) Module d'un nombre complexe



Définition (Argand):

z est un nombre complexe de la forma algébrique $a + ib$ (a, b $\in \mathbb{R}$). Le module du nombre complexe z est le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Interprétation géométrique :

Si M est le point image de z, $|z| = OM$.

Remarques :

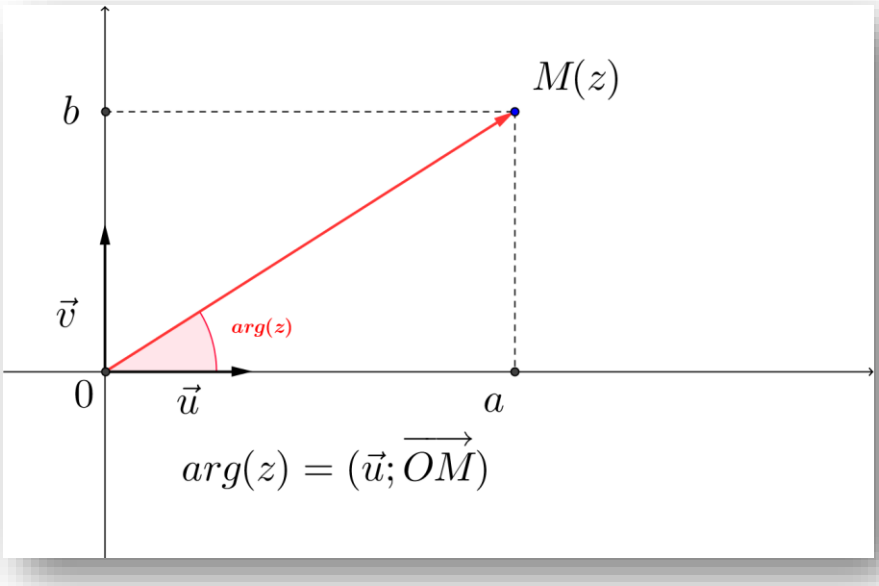
- Si z est un réel, alors $|z|$ coïncide avec la valeur absolue de ce réel, (cohérence de notation !).
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ $(a = b = 0)$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

Propriétés :

- $|\bar{z}| = |z| = |-z|$.
- Pour tous nombres complexes z et z', $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
- $|zz'| = |z||z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Démonstrations immédiates dans la partie 6 avec la forme exponentielle.

B) Arguments d'un nombre complexe



Définition :

Dans le plan complexe, z est un nombre complexe non nul. M est l'image de z. On appelle argument de z, une mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ exprimée en radians.

Remarques :

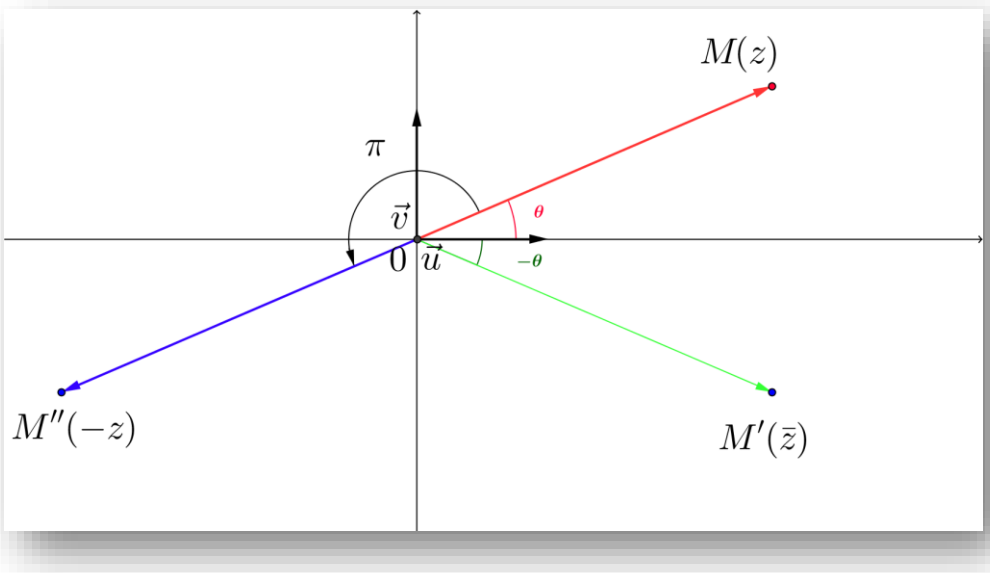
- Le nombre complexe nul ne possède pas d'argument
- Tout nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments. Si θ est l'un d'entre eux, tout autre est de la forme $\theta + k\times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- On écrit souvent : $\arg(z) = \theta \ [2\pi]$.

Propriétés: z et z' sont deux nombres complexes non nuls, n est un entier naturel :

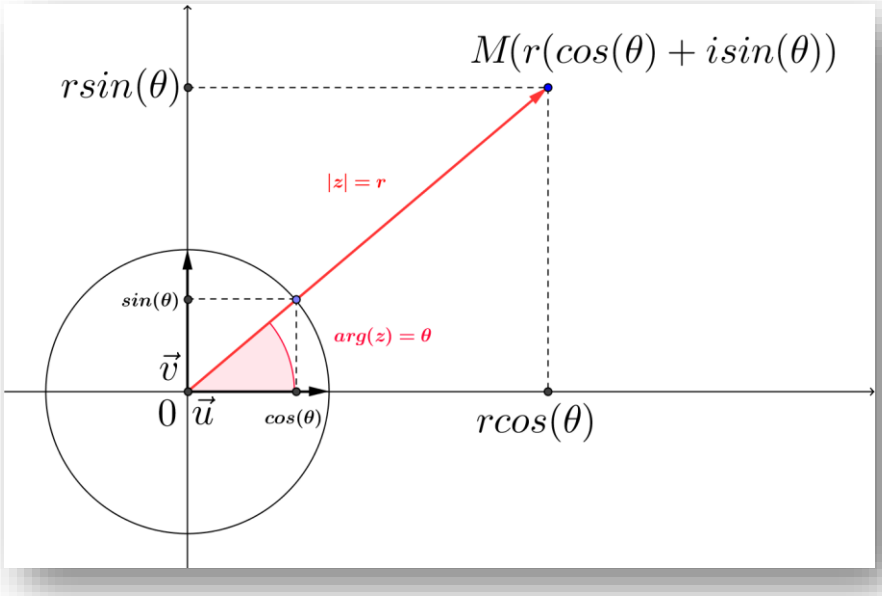
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$
- z réel équivaut à $arg(z) = 0$ ou $rg(z) = \pi$.
- z imaginaire pur équivaut à $arg(z) = \frac{\pi}{2}$ ou $arg(z) = -\frac{\pi}{2}$
- $\arg(zz') = arg(z) + arg(z')$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$
- $\arg(z^n) = n\times arg(z)$

Démonstrations immédiates dans la partie 6 avec la forme exponentielle.

***z*, −*z* *et* |*z*|**



C) Forme trigonometrique d'un nombre complexe non nul



Définition :
Tout nombre complexe non nul z s'écrit $z = r(\cos(\theta) + isin(\theta))$ avec $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$ $[2\pi]$.

Propriété: Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument à 2π près.

Propriété: Si $z = \rho(\cos(\alpha) + isin(\alpha))$ alors $\rho = |z|$ et $\alpha = arg(z)$.

Propriété: $z = r(\cos(\theta) + isin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta') + isin(\theta'))$ sont égaux si et seulement si $z = z'$ et $\theta = \theta'$ $[2\pi]$.

Lien entre forme algébrique (FA) et forme trigonométrique (FT) :

De FT vers FA : $a = rcos(\theta)$ et $b = rsin(\theta)$.

De FA vers FT : $cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$

Attention :

Toute forme $z = r(\cos(\theta) + isin(\theta))$, n'est pas une forme trigonométrique. Il faut s'assurer que $r > 0$.

D) Interpretation geometrique du module de l'argument

1) Module et argument d'une différence de deux nombres complexes

Théorème:

- Si A et B sont deux points d'affixes z_A et z_B alors :
$$AB = |z_B - z_A|$$
- Si A et B sont distincts, alors ; $(\vec{u};\ \overrightarrow{AB}) = \arg(\ z_B - z_A)$

Démonstration : voir livre p 239

2) Cercles et médiatrices

- Le cercle de centre Ω d'affixe z_Ω et de rayon r est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_\Omega| = r$.
- La médiatrice du segment $[AB]$ avec A d'affixe z_A et B d'affixe z_B est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$.

6) LA NOTATION EXPONENTIELLE

A) La fonction $\theta \longmapsto \cos\theta + i\sin\theta$

On appelle f la fonction qui à tout réel θ associe le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Démontrons que pour tous réels θ et θ', $f(\theta + \theta') = f(\theta)\times f(\theta')$ et $f(0) = 1$

- $f(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$.
- $f(\theta + \theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$

et

$$f(\theta)\times f(\theta') = (\cos\theta + i\sin\theta)\times(\cos\theta' + i\sin\theta')$$
$$= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')$$
$$= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$$

On utilise les formules d'addition vues en première S, d'où le résultat.

Nous reconnaissons l'équation fonctionnelle définissant la fonction exponentielle, d'où l'idée d'utiliser cette notation.

B) La notation exponentielle de la forme trigonométrique

Définition : Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Exemples :

- $e^{i\pi} = -1$ d'où la magnifique formule $e^{i\pi} + 1 = 0$.
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$
- $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Théorème: Tout nombre complexe z **non nul** de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme $= re^{i\theta}$. Cette forme est appelée forme exponentielle du nombre complexe z avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\,[2\pi]$

Il suffit d'écrire z sous forme trigonométrique pour parvenir à ce résultat.

Remarque :

$e^{i(-\theta)}$ se note $e^{-i\theta}$.

Propriétés: Pour tous réels θ et θ', et tout entier naturel n non nul,

- $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta$
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (Formule de Moivre qui s'écrit aussi $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$)

Théorème: Si $z = re^{i\theta}$, $z' = r'e^{i\theta'}$ et pour tout entier naturel n non nul,

- $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ (z' non nul)
- $z^n = r^n e^{in\theta}$