Quelques apparitions du nombre $e \approx 2.7182818284591$

Etudier $f(x) = xlnx$

$$f'(x) = 1 \times lnx + x \times \frac{1}{x}$$
$$= lnx + 1$$

Résolvons $f'(x) > 0$

$$lnx + 1 > 0 \Leftrightarrow lnx > -1$$

$lnx > lne^{-1}$ et donc $x > e^{-1}$

$$e^{-1} = \frac{1}{e}$$

D'où le tableau de variations

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	

Equation de la droite (AB) avec $A(0, e)$ et $B(1, 0)$

La droite (AB) n'est pas verticale, on recherche donc son équation réduite sous la forme $y = ax + b$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - e}{1 - 0} = -e$$

Ainsi $(AB) : y = -ex + b$

Or $B \in (AB)$ donc ses coordonnées vérifient son équation :

$$0 = -e \times 1 + b \Leftrightarrow b = e$$

$$\boxed{(AB) : y = -ex + e}$$

<u>Remarque</u> : On pouvait directement remarquer que e est l'ordonnée à l'origine de la droite

Résoudre $ln(x) + ln(x + 1 - e) < 1$

L'inéquation (notée I) a un sens si et seulement si $x > 0$ ET $x + 1 - e > 0$ donc $x > e - 1$

Notons $D =]e - 1 ; +\infty[$

Pour tout $x \in D$,

$E \Leftrightarrow \ln\big(x \times (x + e - 1)\big) < lne$

ln est strictement croissante sur]0 ;+∞[donc pour $a, b > 0,\ lna > lnb \Leftrightarrow a < b$

Donc $I \Leftrightarrow x \times (x - e - 1) < e$

En développant et transposant :

$$x^2 - (e + 1)x - e < 0$$

$$\Delta = (e - 1)^2 - 4e = e^2 + 2e + 1$$
$$= (e + 1)^2$$

Les deux racines sont -1 et e et l'ensemble solution est :

$$\boxed{S =] - 1 ; e[\cap D =]e - 1; e[}$$